Grafica de funciones

http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/graficas.htm

Hacer un estudio de la gráfica de la función:

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

Campo de existencia: El denominador, $1 + x^2$, no se anula en ningún punto, por tanto el campo de existencia es todo R.

Corte con los ejes: Para $x = 0$, tenemos que $y = 0$. Y si hacemos $y = 0$, encontramos que la única solución es y=0. En definitiva, hay un solo punto de corte, esto es el (0,0), el orígen.

Asíntotas: En cuanto a las asíntotas horizontales podemos hallar los límites:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

lo cual nos indica que el eje x es una asíntota horizontal (tanto por la derecha como por la izquierda).

Asi{ntotas verticales

Para las asíntotas verticales vemos dónde se hace infinita la función, y en realidad no hay ningúna, pues no hay ningún valor de x que anule el denominador.

Máximos y mínimos. Crecimiento y decrecimiento: Calculamos la primera derivada de *f(x)*:

$$f'(x) = \frac{1.(1+x^2) - x.2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

la igualamos a 0, $f'(x) = 0$, y resolvemos la ecuación resultante:

$$\frac{1-x^2}{\cancel{(1+x^2)^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1-x^2 = 0$$

cuyas raíces son x = -1, x = +1. Estos dos puntos son los dos posibles extremos locales, conviene apuntar *la magnitud* de la función en cada uno de estos puntos:

$$f(-1) = -1/2 \; , \; f(+1) = 1/2$$

x	-∞		-1		1		∞
f '(x)		-	0	+	0	-	
f(x)		Decrece ↘	Mínimo	Crece ↗	Máximo	Decrece ↘	

También podemos hacer un estudio del crecimiento y decrecimiento de la gráfica, estudiando el signo de f' en las tres regiones $(-\infty,-1)$, $(-1,+1)$, $(+1,+\infty)$:

$(-\infty,-1)$: $f'(x) < 0$. La función es decreciente.
$(-1,+1)$: $f'(x) > 0$. La función es creciente.
$(+1,+\infty)$: $f'(x) < 0$. La función es decreciente.

Por otra parte, podemos estudiar si son máximos o mínimos haciendo la derivada segunda de f:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

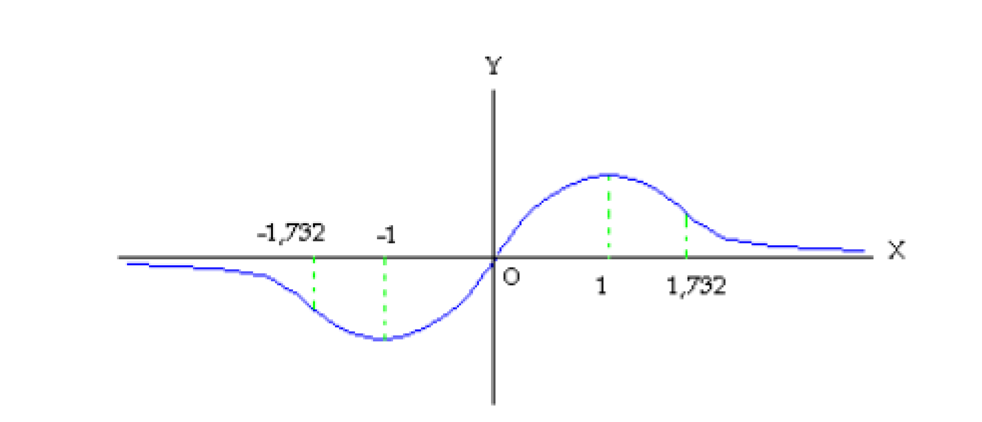
En concreto tenemos, $f''(-1) > 0$, lo que nos indica que en $x=-1$ hay un mínimo. Mientras que $f''(-1) < 0$, lo que significa que en $x=+1$ hay un máximo.

x	-∞		-1		1		∞
f '(x)		-	0	+	0	-	
f(x)		Decrece ↘	Mínimo	Crece ↗	Máximo	Decrece ↘	

Concavidad y puntos de inflexión. Hacemos $f''(x) = 0$, y hallamos sus raíces:

$$\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x^2-3) = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Estos tres puntos: $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$, $x = +\sqrt{3}$ son precisamente los puntos de inflexión de la curva, allí donde la concavidad cambia de tipo. Finalmente la concavidad la estudiamos en estas cuatro regiones, de acuerdo con el signo de f'':



$(-\infty, -\sqrt{3})$: $f''(x) < 0$. La curva es *convexa* (concavidad en $\cap$).
$(-\sqrt{3}, 0)$: $f''(x) < 0$. La curva es *concava* (concavidad en U).
$(0, +\sqrt{3})$: $f''(x) < 0$. La curva es *convexa* (concavidad en $\cap$).
$(+\sqrt{3}, +\infty)$: $f''(x) < 0$. La curva es *concava* (concavidad en U).

Reuniendo todos los datos obtenidos podemos pasar a trazar la gráfica de la función: