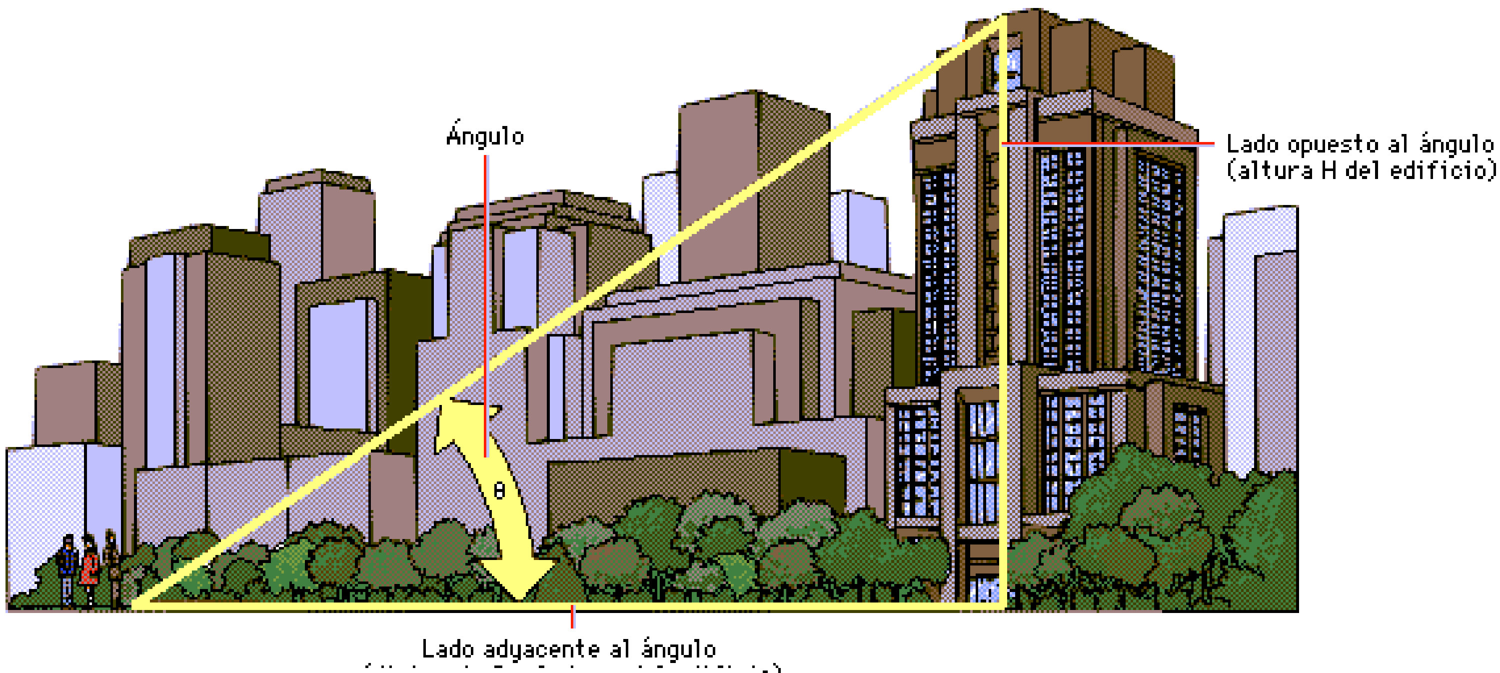
TRIGONOMETRÍA



MATEMÁTICA BÁSICA: TRIGONOMETRÍA

MEDIDA DE ÁNGULOS y RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

PROFESOR EFRÉN GIRALDO T.

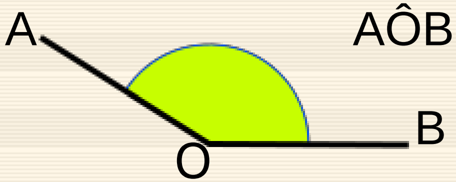
INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITAN0 ITM

NOVIEMBRE 2011

- Básicamente la trigonometría es la relación matemática entre los ángulos y los lados de un triángulo.

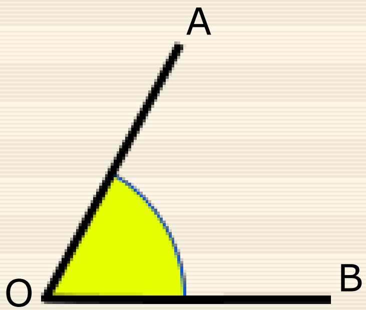
- La trigonometría tiene que ver principalmente con las funciones: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

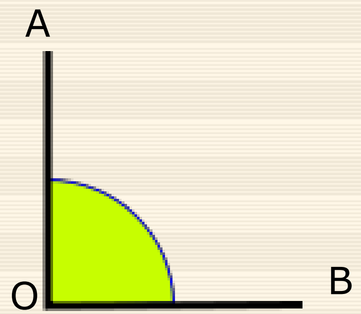
ÁNGULO: es la figura formada por 2 semirrectas que se unen en un O llamado vértice

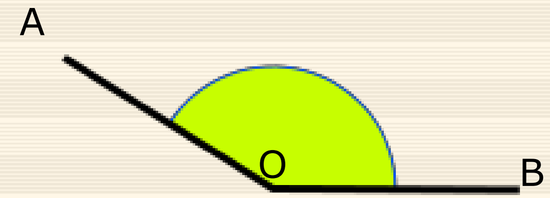


CLASIFICACIÓN DE ÄNGULOS

1 – Según su medida







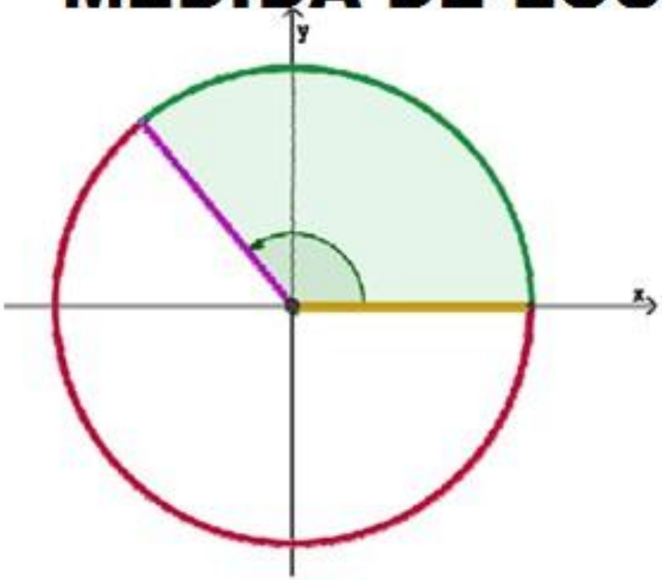
Agudo: AÔB< 90º

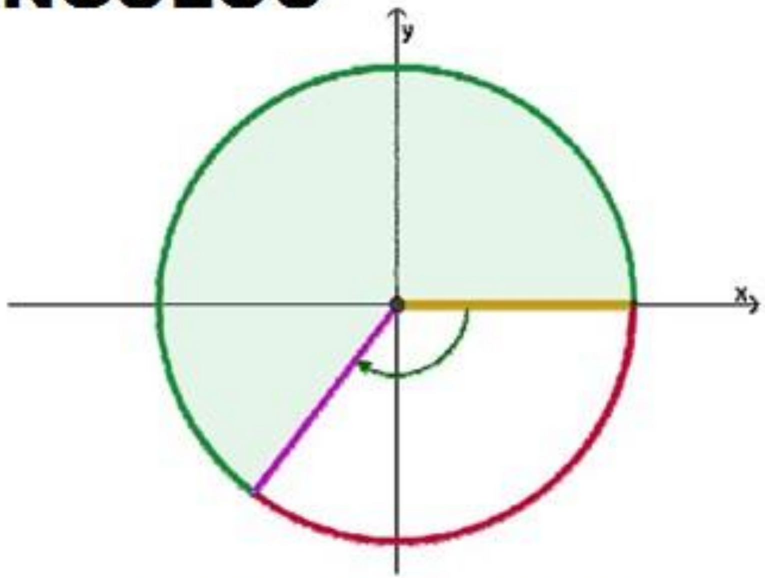
Recto: AÔB = 90º =π/2

Obtuso: AÔB $>$ 90º

A

MEDIDA DE LOS ÁNGULOS





ÁNGULO POSITIVO

La medida de un ángulo será un número positivo si su lado inicial fijo está en el eje horizontal positivo y su lado terminal que se ha movido **en contra** de las manecillas del reloj.

ÁNGULO NEGATIVO

La medida de un ángulo será un número negativo si su lado inicial fijo está en el eje horizontal positivo y su lado terminal que se ha movido **a favor** de las manecillas del reloj.

Aquí el signo del ángulo sólo representa la dirección del mismo

http://es.scribd.com/doc/12731979/CIRCULO-UNITARIO

Unidades de medidas de ángulos

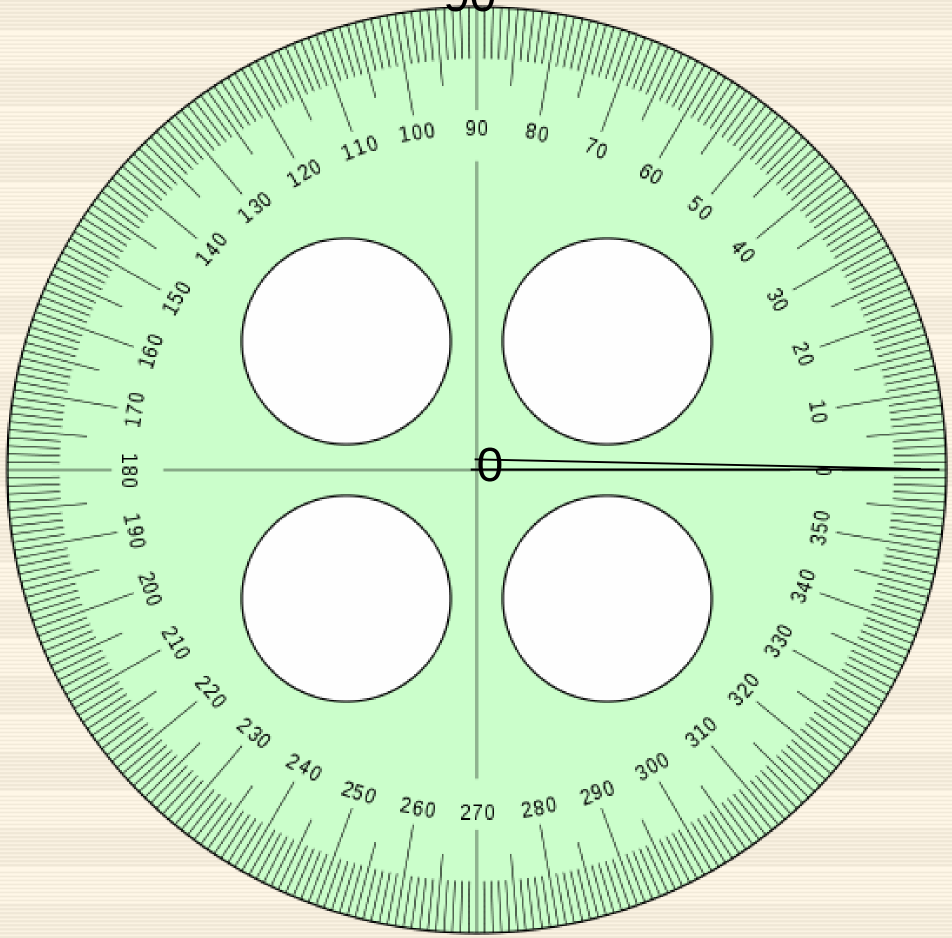
En trigonometría, se emplean tres unidades:

1. La más utilizada en la vida cotidiana es el **Grado sexagesimal**. Divide una circunferencia en 360 partes iguales o grados°. Por tanto 1/360 es 1° (un grado).

1. En matemáticas es el **Radián** la más usada. Se basa en la idea de colocar la *longitud del radio a lo largo de la circunferencia, se trabaja en realidad es con partes de la longitud de la circunferencia.*

2. El Grado centesimal se desarrolló como la unidad más próxima al sistema decimal, se usa en topografía, arquitectura o en construcción” y se divide la circunferencia en 400 partes.

Sistema Sexagesimal



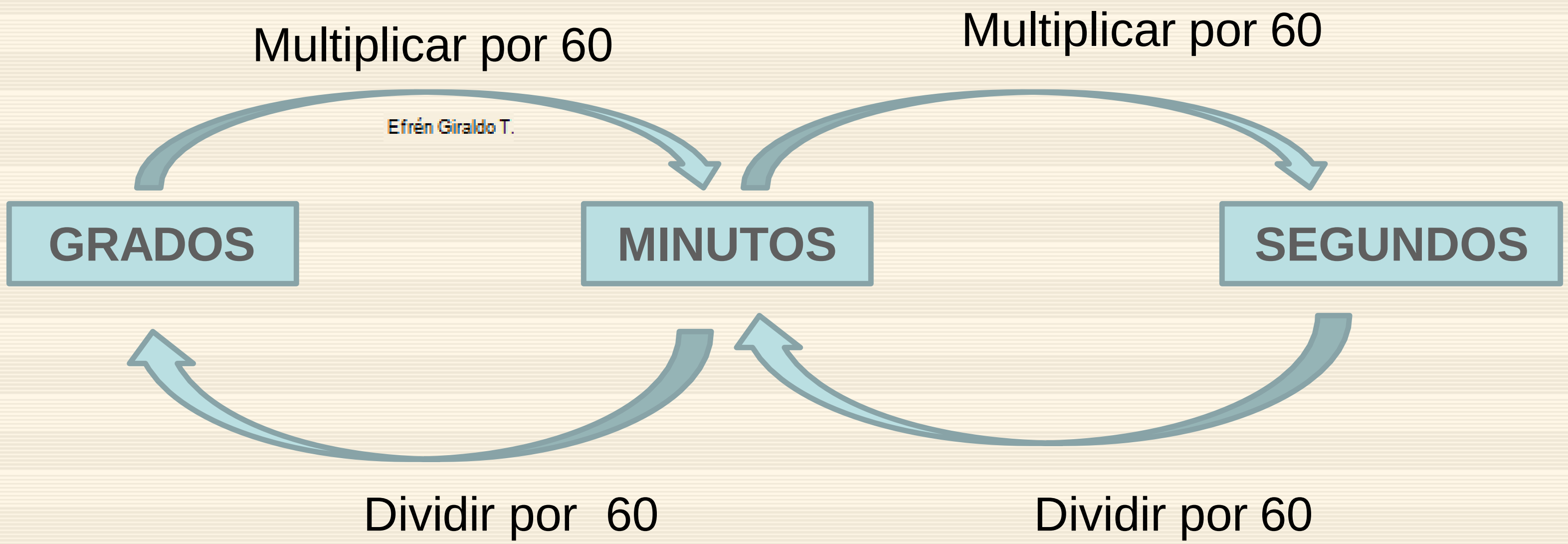
Este ángulo en particular, se dice que mide 1º (un grado), y que corresponde a un ángulo entre los 360 que se pueden dividir la circunferencia. Un grado corresponde a dos líneas rectas pequeñas tomadas desde el centro 0

(Ruben Álbarez Cabrera,Trigonometría contemporanea).

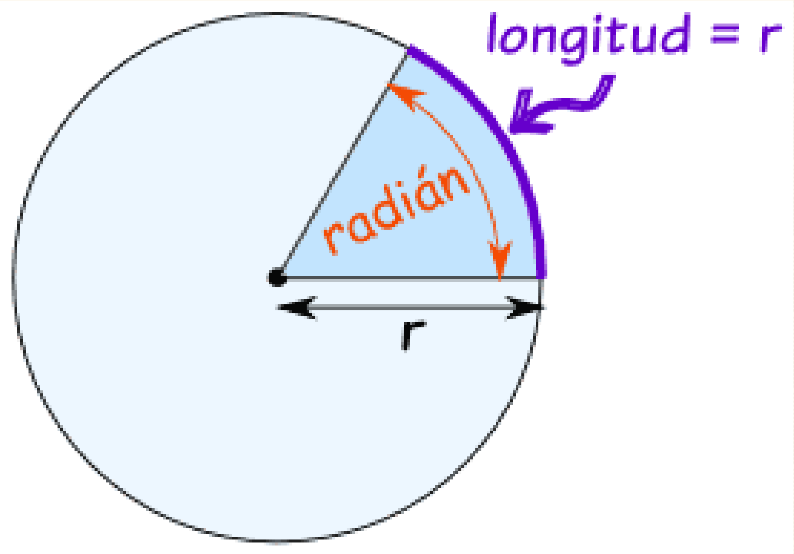
Se llama sexagesimal porque 1° grado se divide en 60 partes lo cual da un minuto 1´ y a su vez el minuto se divide en 60 lo cual da un segundo o 1”

1º = 60´
1´ = 60”
1º = 3600”

CONVERSIÓN DE MEDIDAS.



- 2. Un Radian: es un ángulo que sostiene un arco de longitud igual al radio r. Ese ángulo diremos que mide **1 *radián***



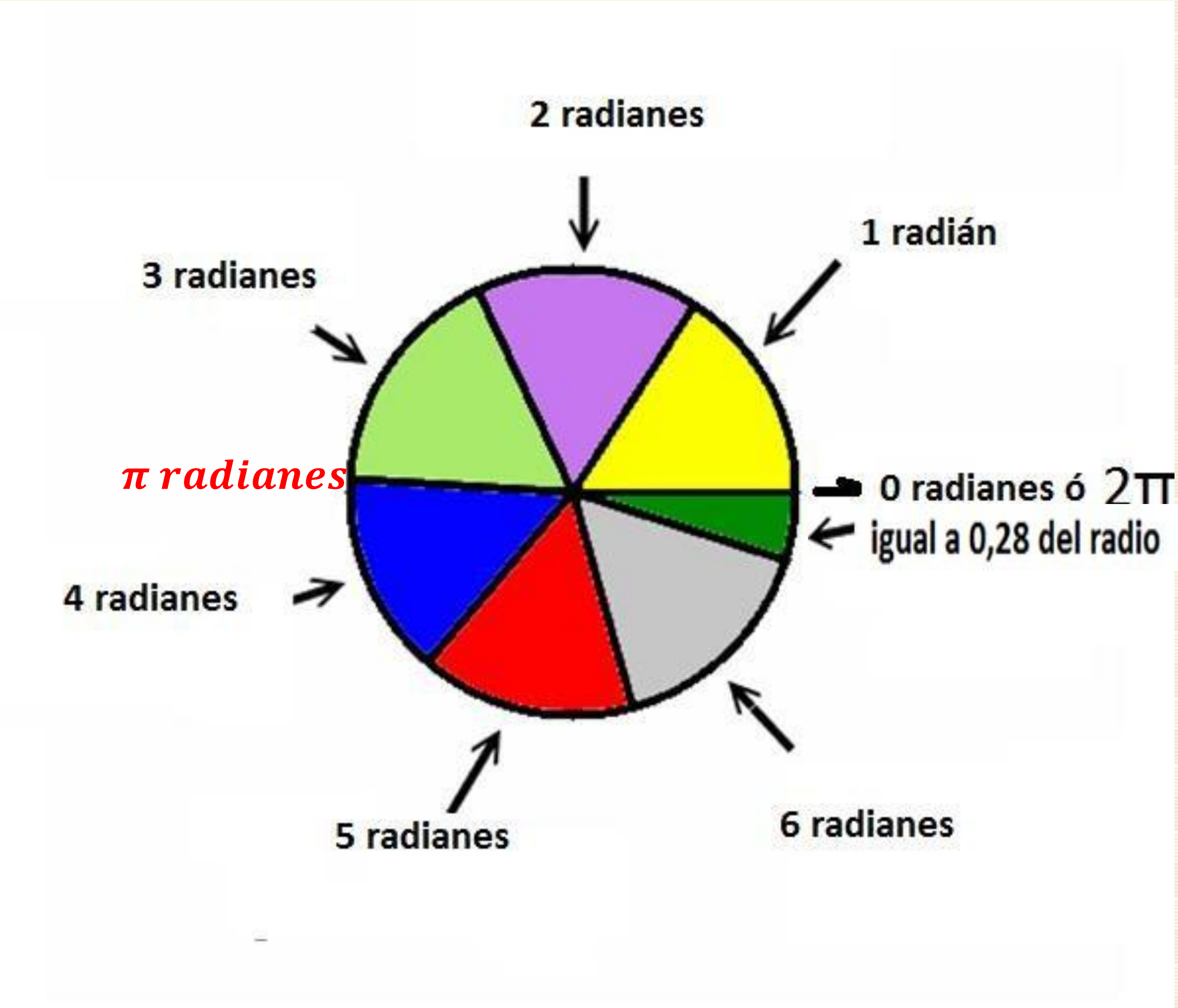
- En una circunferencia esto se puede hacer un 6 veces y un pedacito = 6.28

https://www.geogebra.org/m/WextNs4f

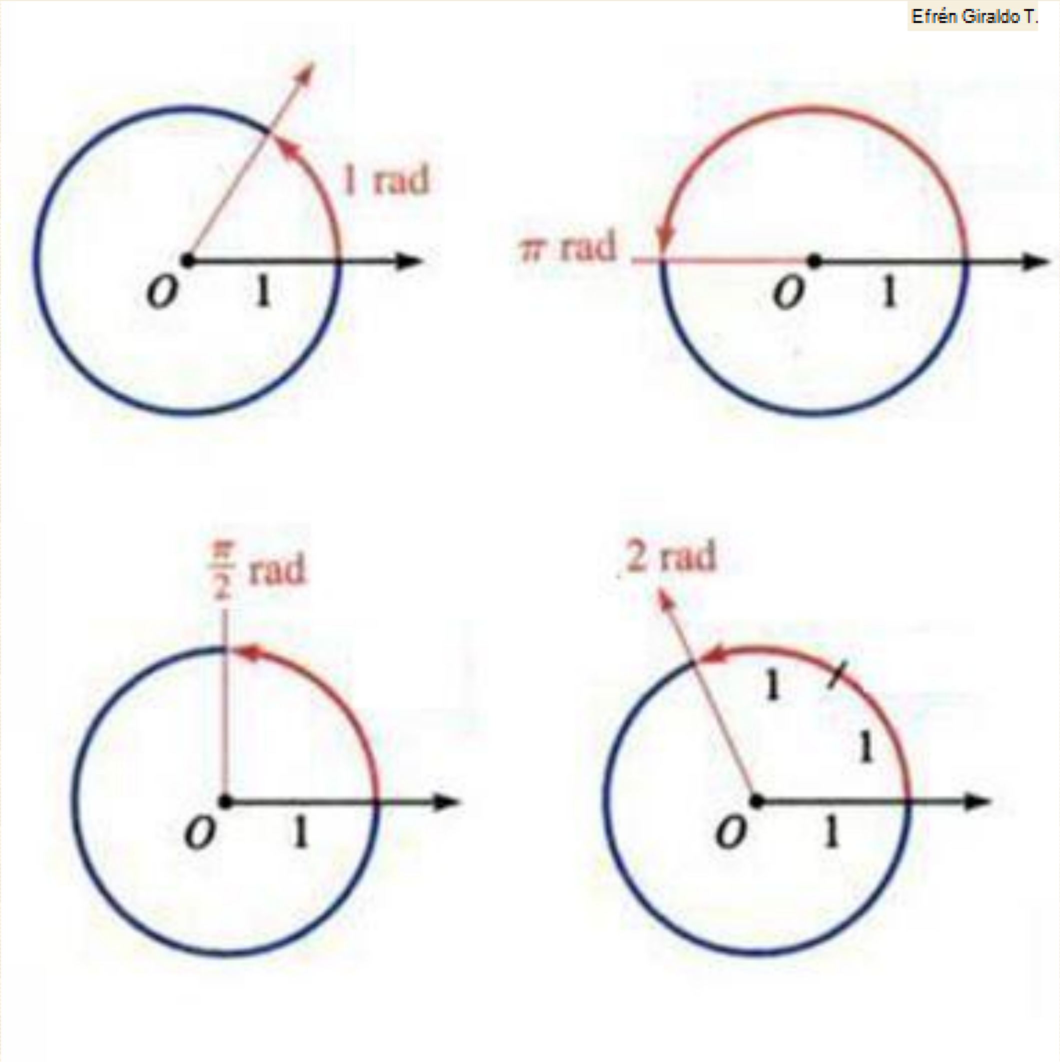
- Es decir, si se corta un pedazo de cuerda de longitud exactamente igual al radio, ¿cuántos trozos harían falta para **dar una vuelta** completa alrededor de la circunferencia?
- Más o menos una cuerda de longitud = **6.28** o 2*3.14= 2π= 6.28…

- La longitud de una circunferencia completa es 2π radianes o 6.28.
- 6.28 qué?
- De pende de la unidad de medida usada:
- Si el radio es 1 m será 6.28m
- Si el radio es 1km será 6.28km
- Si r= 1 pulgada será 6.28 pulg.
- Si el radio r no es unitario, $L= 2\pi r$

(la unidad de medida usada)

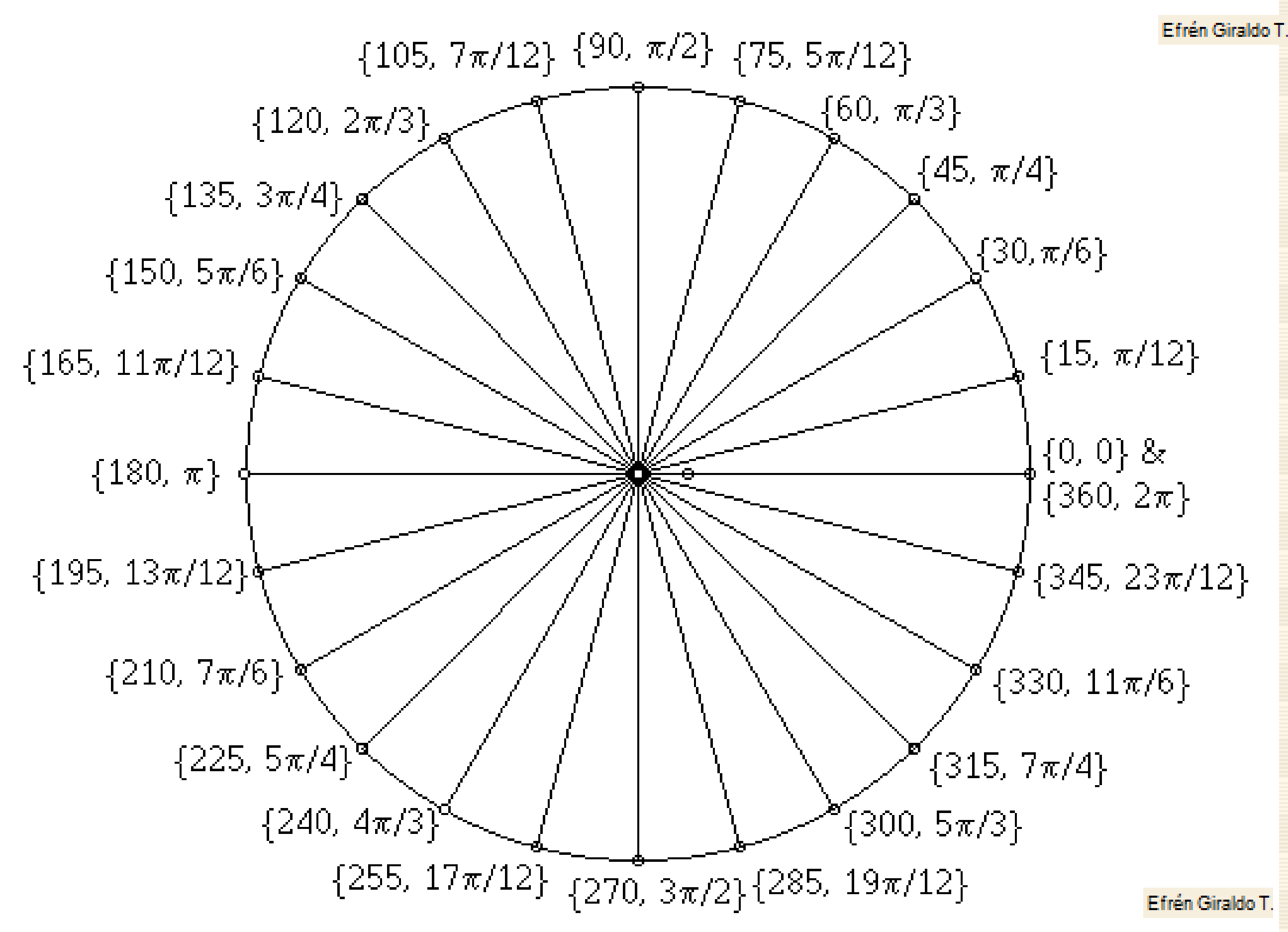


Se toma como referencia el eje x



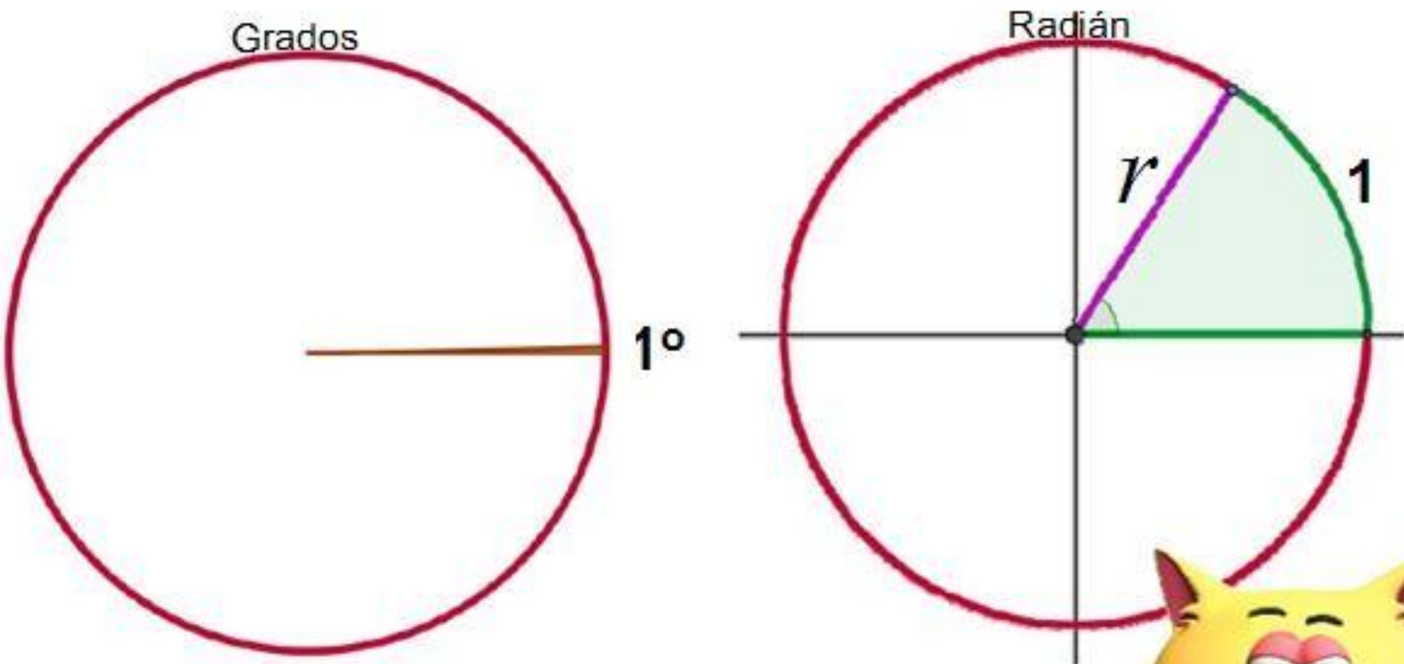
Ángulos en radianes

(Stewart, 2007)



Grados y los radianes correspondientes

Compara el tamaño de 1 radian con 1º.



La medida de un radián es mucho más grande que la medida de un grado.

http://es.scribd.com/doc/12731979/CIRCULO-UNITARIO

Relación entre grados y radianes

$$180° = \pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

1. Para convertir grados en radianes, multiplique por $\frac{\pi}{180}$.

2. Para convertir radianes en grados, multiplique por $\frac{180}{\pi}$.

(Stewart, 2007)

Ejemplo 1 **Convertir entre radianes y grados**

a) Exprese 60° en radianes. b) Exprese $\frac{\pi}{6}$ rad en grados.

Solución La relación entre grados y radianes da

$$\text{a) } 60° = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) \text{rad} = \frac{\pi}{3} \text{rad} \qquad \text{b) } \frac{\pi}{6} \text{rad} = \left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{180}{\pi}\right) = 30°$$

(Stewart, 2007)

Ejemplo 1 Convertir entre radianes y grados

a) Exprese 60° en radianes. b) Exprese $\dfrac{\pi}{6}$ rad en grados.

Solución La relación entre grados y radianes da

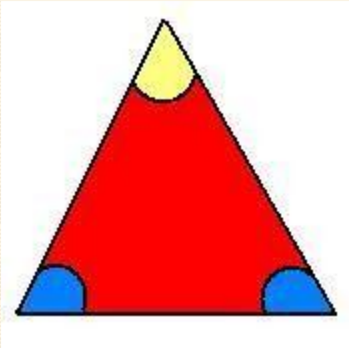
a) $60° = 60\left(\dfrac{\pi}{180}\right) \text{ rad} = \dfrac{\pi}{3} \text{ rad}$ b) $\dfrac{\pi}{6} \text{ rad} = \left(\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\dfrac{180}{\pi}\right) = 30°$

(Stewart, 2007)

Triángulos

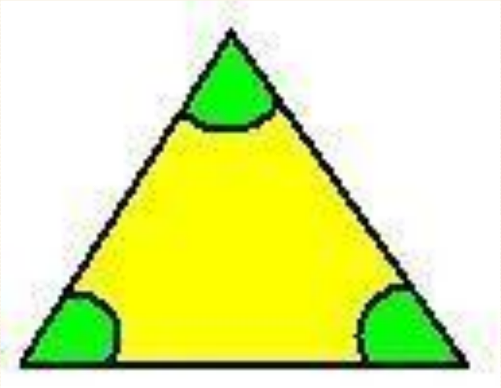
- **El triángulo es el polígono más simple y el más fundamental, ya que cualquier polígono puede resolverse en triángulos**

- ***Triángulo Isósceles***
- **Se llama triángulo *isósceles* al que tiene dos lados iguales; el tercer lado es la *base*. Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales;**
- **Si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos a dichos ángulos también serán iguales y viceversa .**

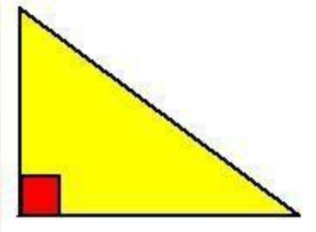


http://trigonometria.galeon.com/

Se llama triángulo *equilátero* al que tiene los tres lados iguales. Por tanto los tres ángulos de un triángulo equilátero son iguales; recíprocamente, si los tres ángulos de un triángulo son iguales, el triángulo es equilátero.



http://trigonometria.galeon.com



Cuando uno de los ángulos es recto (igual a 90º), se llama triángulo *rectángulo*.

Y este triangulo es la base de mucha parte de la trigonometría.

Recordar que la suma de los 3 ángulos de un triángulo cualquiera suman 180º.

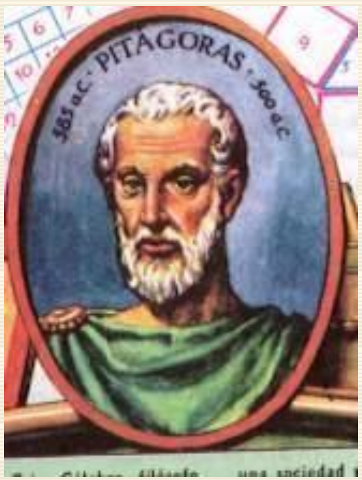
Si se conoce un ángulo $\propto$ de un triángulo rectángulo, el otro ángulo se conoce fácilmente: $90-\propto$

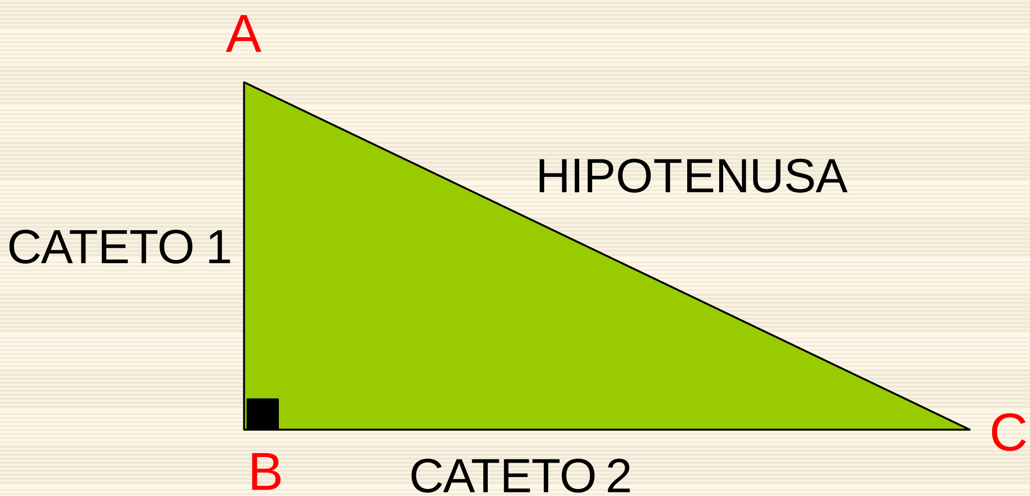
Así, si un ángulo es 30º el otro será 90º-30º= 60º

http://trigonometria.galeon.com

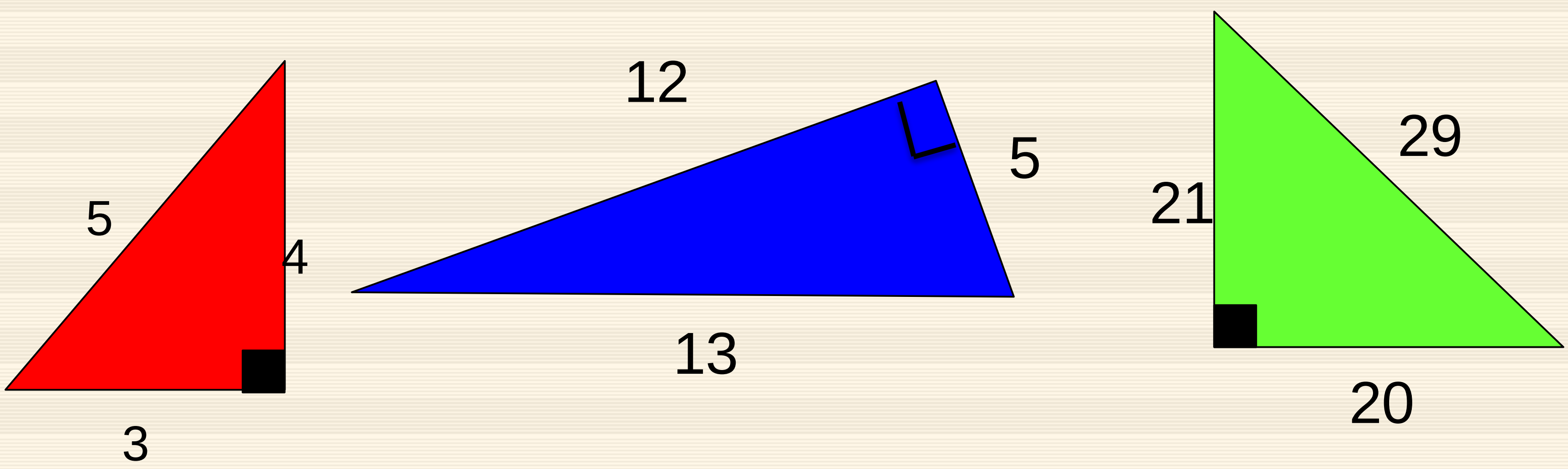
TEOREMA DE PITÁGORAS

$$(\text{HIPOTENUSA})^2 = (\text{CATETO}_1)^2 + (\text{CATETO}_2)^2$$





http://trigonometria.galeon.com

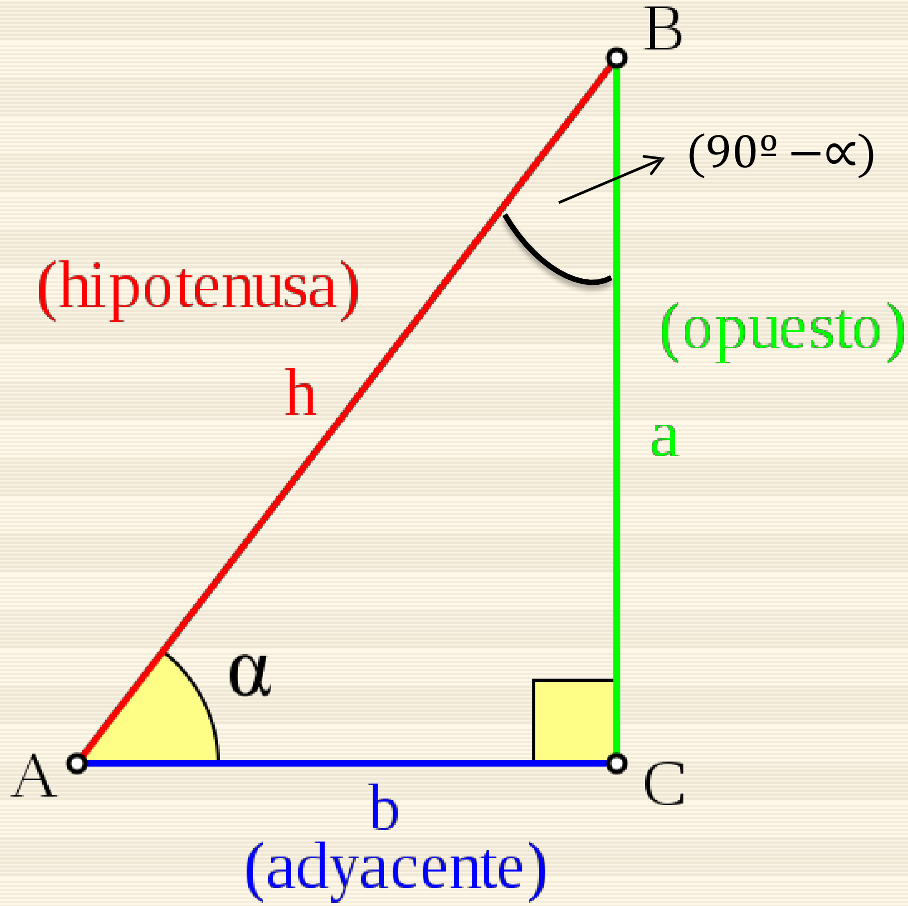


http://trigonometria.galeon.com

TRIGONOMETRÍA DE TRÍÁNGULOS RECTOS

FUNCIONES O RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

48



http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Trigono_a10.svg

$$\sin\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}.$$

Efrén Giraldo T.

$$\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}.$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{a}{b}.$$

Efrén Giraldo T.

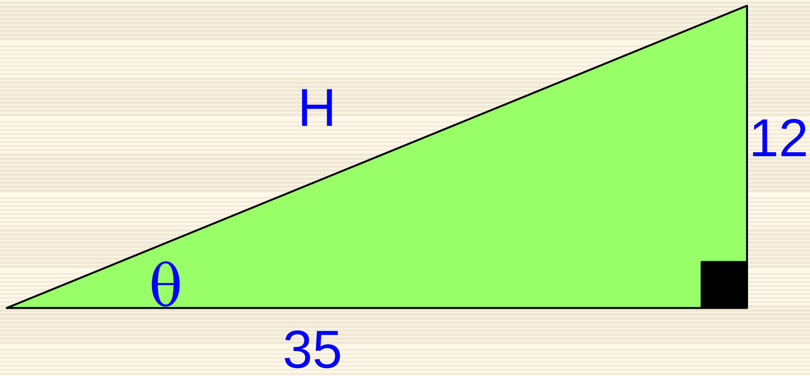
$$\cot\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{b}{a}.$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{h}{b}.$$

Efrén Giraldo T.

$$\csc\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{h}{a}.$$

http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Trigono_a10.svg



TEOREMA DE PITÁGORAS

$$H^2 = 12^2 + 35^2$$

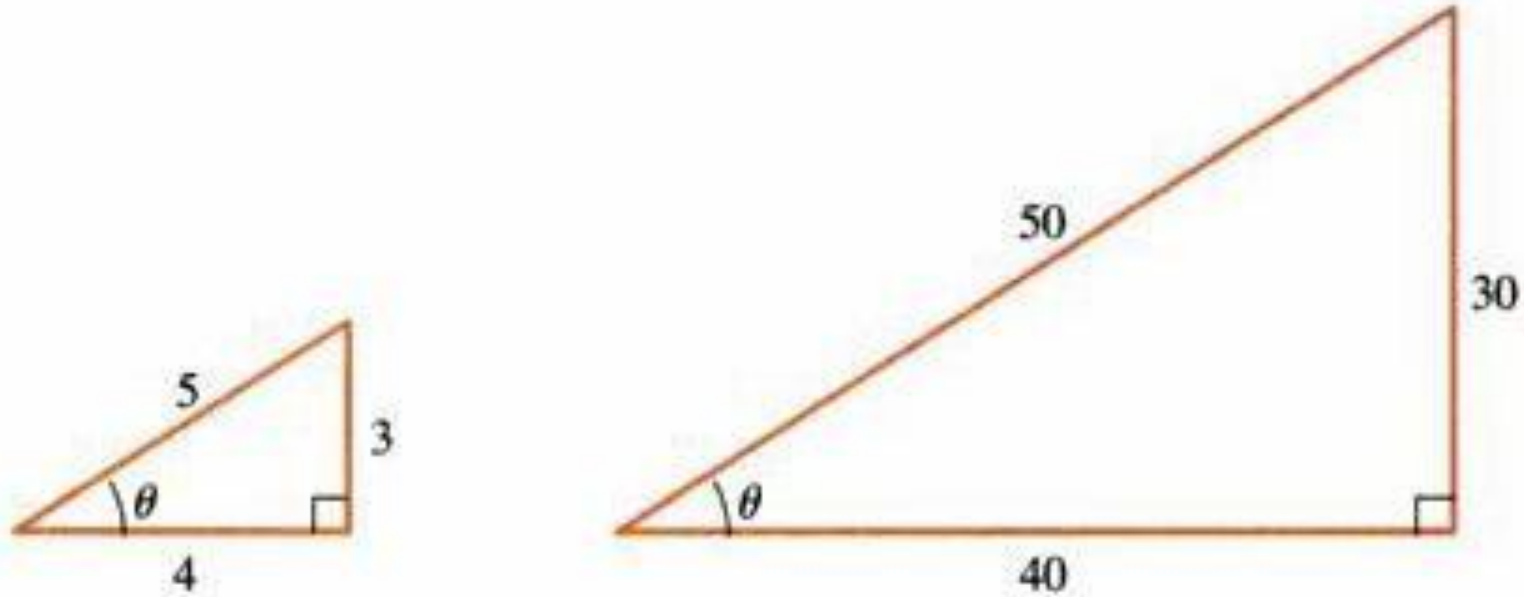
$$H = \sqrt{1369} = 37$$

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{12}{37}$	$\tan\theta = \dfrac{12}{35}$	$\sec\theta = \dfrac{37}{35}$
$\cos\theta = \dfrac{35}{37}$	$\cot\theta = \dfrac{35}{12}$	$\csc\theta = \dfrac{37}{12}$

http://www.google.com.co/#sclient=psy- ab&hl=es&site=&source=hp&q=Rub%C3%A9n%20Alba%20Cabrera.%20Trigonometr%C3%ADa%20contemporanea.%20http%3A%2F%2Fwww.sectormatematica.cl%2Fppt.htm&pbx=1&oq=&aq=&aqi=&aql=&gs_sm=&gs_upl=&bav=on.2,or.r_gc.r_pw.,cf.osb&fp=5d66ad1cdfb15af2&biw=1024&bih=572&pf=p&pdl=3000

- Nota importante:
- Las funciones trigonométricas son en realidad razones trigonométricas puesto que son el resultado de la división entre los diferentes lados de un triángulo rectángulo(catetos e hipotenusa)

Elaboró Efrén Giraldo Toro



$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\theta = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

$\cos\theta = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\cos\theta = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$

(Stewart, 2007)

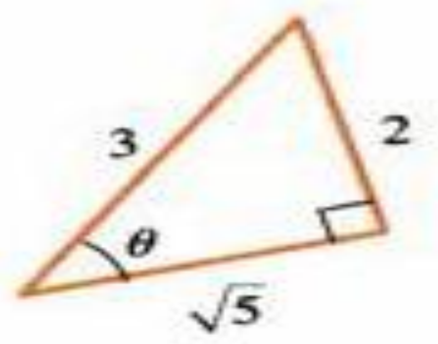


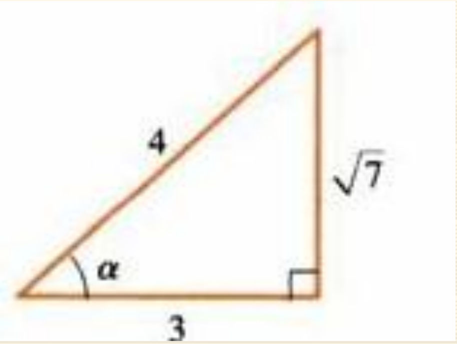
Figura 3

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3} \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\csc\theta = \frac{3}{2} \qquad \sec\theta = \frac{3}{\sqrt{5}} \qquad \cot\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

(Stewart, 2007)

Si $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, bosqueje un triángulo rectángulo con ángulo α agudo y encuentre l
otras cinco relaciones trigonométricas de α.

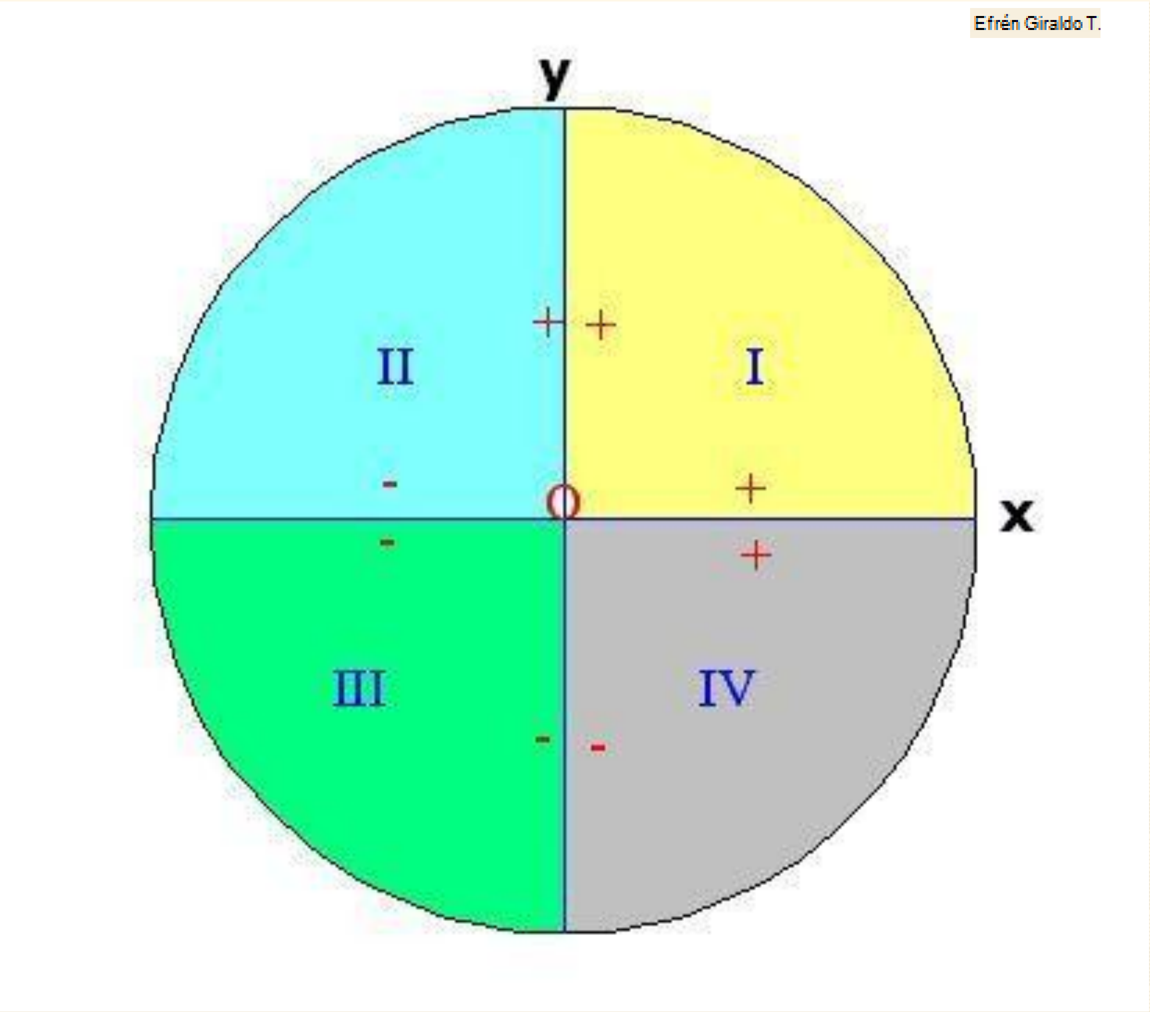


Solución Puesto que $\cos\alpha$ se define como la relación del cateto adyacente a la hipotenusa, se bosqueja un triángulo con hipotenusa de longitud 4 y un cateto de longitud 3 adyacente a α. Si el lado opuesto es x, entonces por el teorema de Pitágoras, $3^2 + x^2 = 4^2$ o $x^2 = 7$, por lo tanto, $x = \sqrt{7}$. Después se usa el triángulo de la figura 4 para hallar las relaciones.

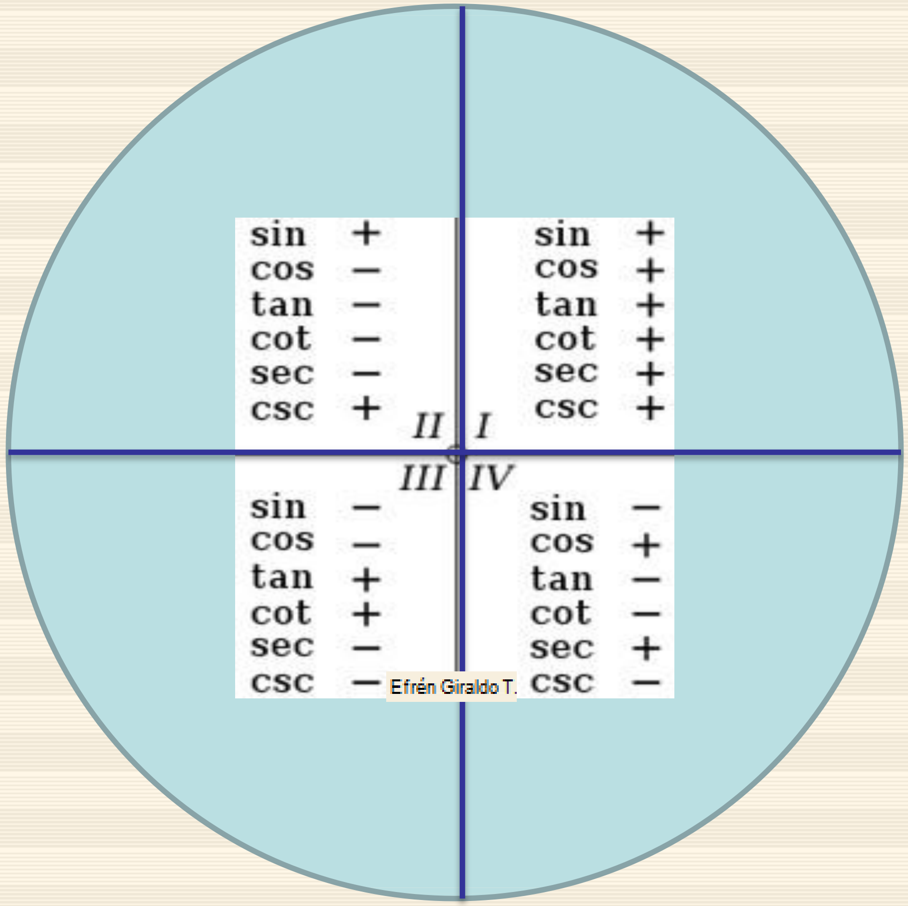
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad \cos\alpha = \frac{3}{4} \qquad \tan\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\csc\alpha = \frac{4}{\sqrt{7}} \qquad \sec\alpha = \frac{4}{3} \qquad \cot\alpha = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

(Stewart, 2007)



Valores positivos o negativos de la x y la y en los respectivos cuadrantes.



Valores positivos o negativos de las funciones trigonométricas en los respectivos cuadrantes

FUNCIONES O RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS ESPECIALES

Función Ángulo	Seno θ	Cos θ	Tang θ	Ctg θ	Sec θ	Csc θ
30° ó π/6	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45° ó π/4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60° ó π/3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

http://www.google.com.co/imgres?q=funciones+trigonometricas+de+30+60+y+45&um=1&hl=es&sa=N&biw=1280&bih=859&tbm=isch&tbnid=EqItcxVK5wXMnM:&imgrefurl=http://www.tareasfacil.info/Matematicas-Basicas/trigonometria-basica-elementos.html&docid=fkAMxapcbTa07M&imgurl=http://www.tareasfacil.info/imaganes/clip_image052_0056.jpg&w=518&h=157&ei=DuKZTtb-CYK5twfrj4GHBA&zoom=1&iact=hc&vpx=401&vpy=632&dur=323&hovh=120&hovw=400&tx=301&ty=94&sig=108289476752443945942&page=2&tbnh=74&tbnw=243&start=26&ndsp=23&ved=1t:429,r:1,s:26

PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGOMOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS:
son las que al multiplicar la una por la otra dan 1 o la una es igual 1 sobre la otra.

$$\mathbf{sen}\,\theta = \frac{1}{\mathbf{csc}\,\theta} \qquad \mathbf{cos}\,\theta = \frac{1}{\mathbf{sec}\,\theta} \qquad \mathbf{tan}\,\theta = \frac{1}{\mathbf{cot}\,\theta}$$

$$\mathbf{sen}\,\theta\,\mathbf{csc}\,\theta = 1 \qquad \mathbf{cos}\,\theta\,\mathbf{sec}\,\theta = 1 \qquad \mathbf{tan}\,\theta\,\mathbf{cot}\,\theta = 1$$

Rubén Alba Cabrera. Trigonometría contemporanea. http://www.sectormatematica.cl/ppt.htm

EJEMPLOS

A) $\dfrac{1}{\text{sen}36^\circ} = \csc 36^\circ$

B) $\dfrac{1}{\cos 17^\circ} = \sec 17^\circ$

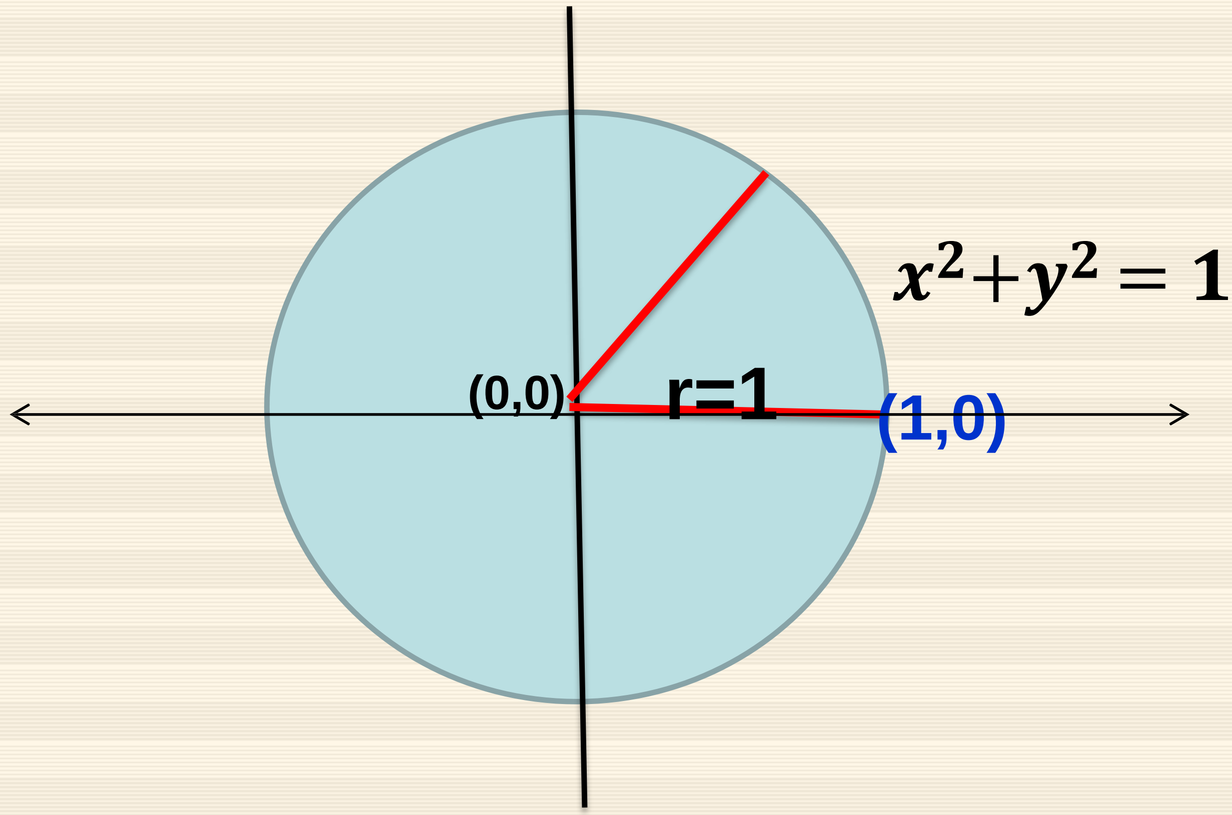
C) $\tan 49^\circ \cot 49^\circ = 1$

D) $\text{sen}2\theta \csc 2\theta = 1$

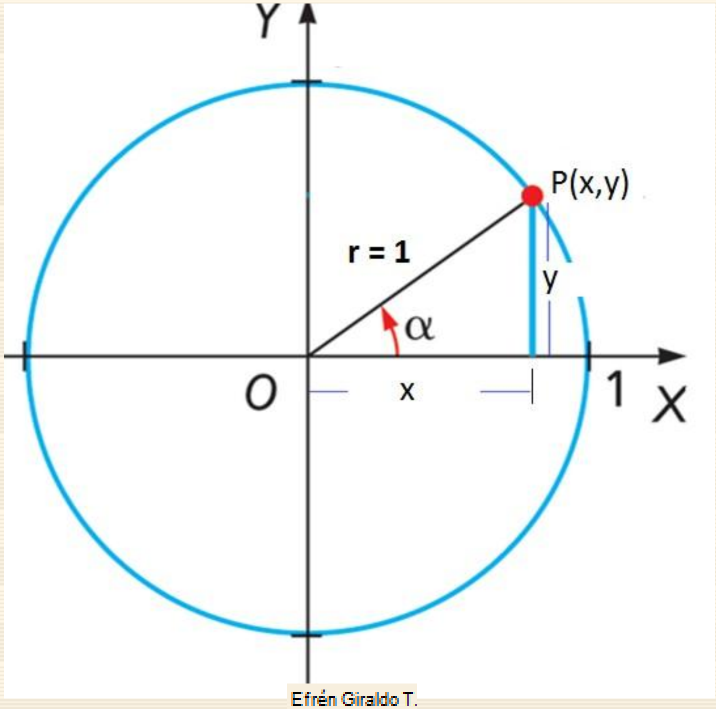
Rubén Alba Cabrera. Trigonometría contemporanea. http://www.sectormatematica.cl/ppt.htm

CÍRCULO UNITARIO

- Un círculo unitario es el conjunto de puntos que están a una distancia 1 del centro o sea que su radio es 1 y su ecuación es:
- $$x^2+y^2=1$$
- Si se ubica el círculo unitario en un plano cartesiano su centro coincide con el origen de coordenadas (0,0) y los ángulos se comienzan a medir a partir del eje x ó punto P(1,0)



Círculo unitario

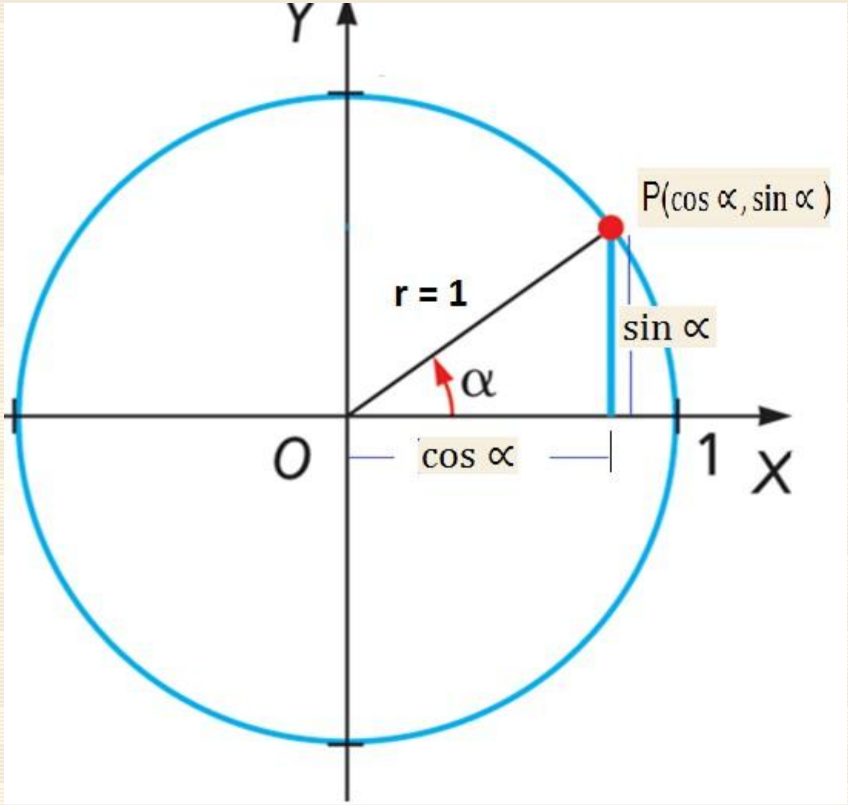


Gráfica de coordenadas de cualquier punto (x,y) del círculo en el plano xy.

El seno y el coseno por definición son:

- $\sin \propto = \frac{y}{1} \longrightarrow \sin \propto = y$
- $\cos \propto = \frac{x}{1} \longrightarrow \cos \propto = x$

- El *seno* de un ángulo se asocia con y
- o eje vertical
-
- El *coseno* se asocia con x o eje horizontal



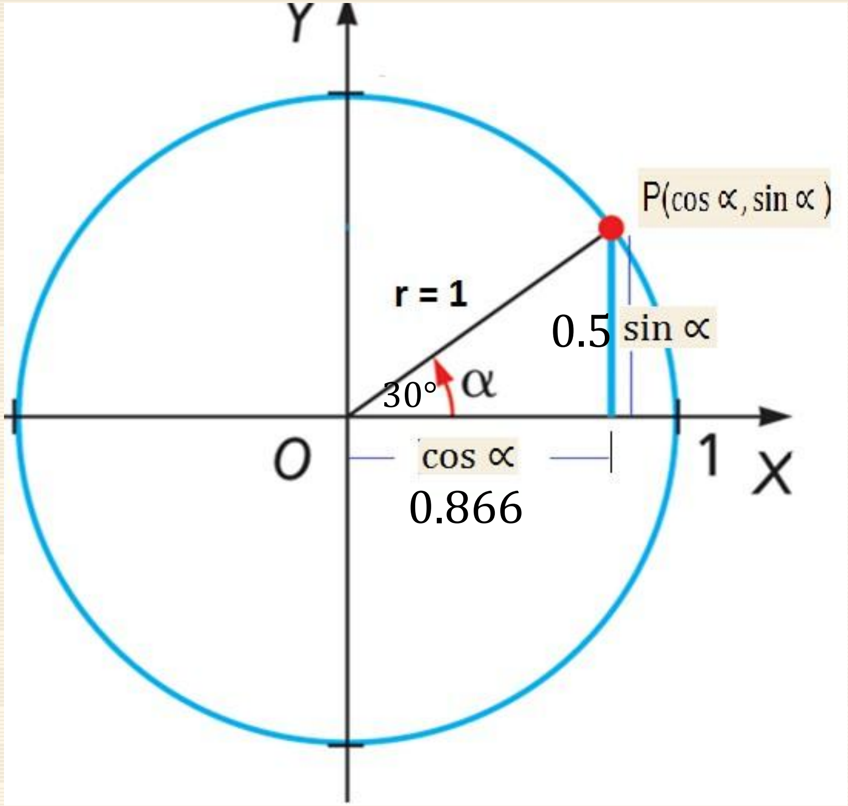
Por tanto las coordenadas P(x,y) que estén en el círculo unitario se representan trigonométricamente también como

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{cos} \propto, \mathbf{sin} \propto)$$

Lo cual permite que conocido el ángulo $\propto$, se pueda hallar su posición en el círculo P(x,y) mediante **P(**$\boldsymbol{cos \propto}$, $\mathbf{sin} \propto$ **)**

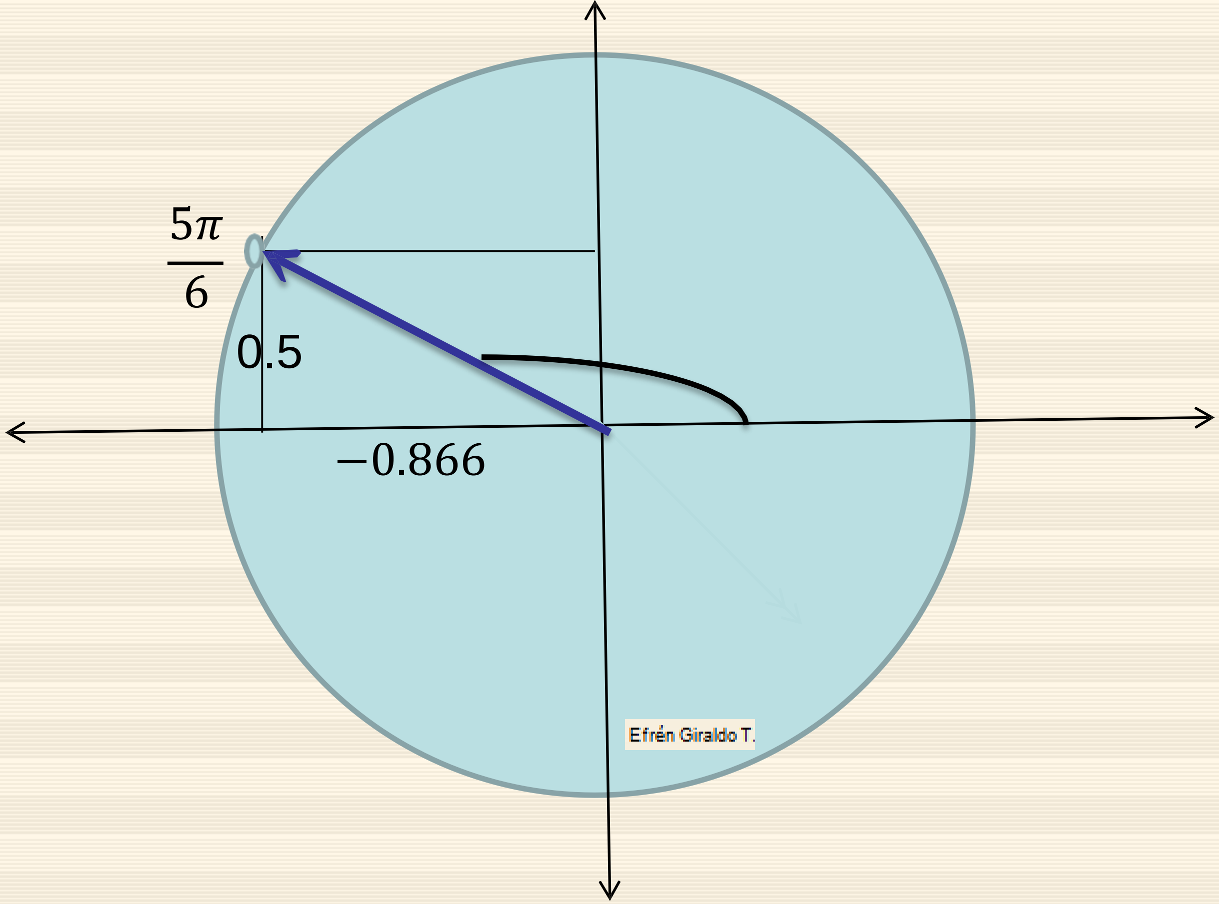
- $\propto=30°$
- $x = \cos 30° = 0.866$
- $y = \sin 30° = 0.5$

A un ángulo de 30° le corresponde en el círculo unas coordenadas P(0.866, 0.5)


Y
P(cos ∝, sin ∝)
r = 1
0.5
sin ∝
30°
α
O
cos ∝
0.866
1
X

- Lo anterior vale tanto para ángulos en grados ° como en radianes (π o números reales) puesto que las calculadoras permiten ambos sistemas adecuándolas convenientemente en el modo “sexages” o “radianes”

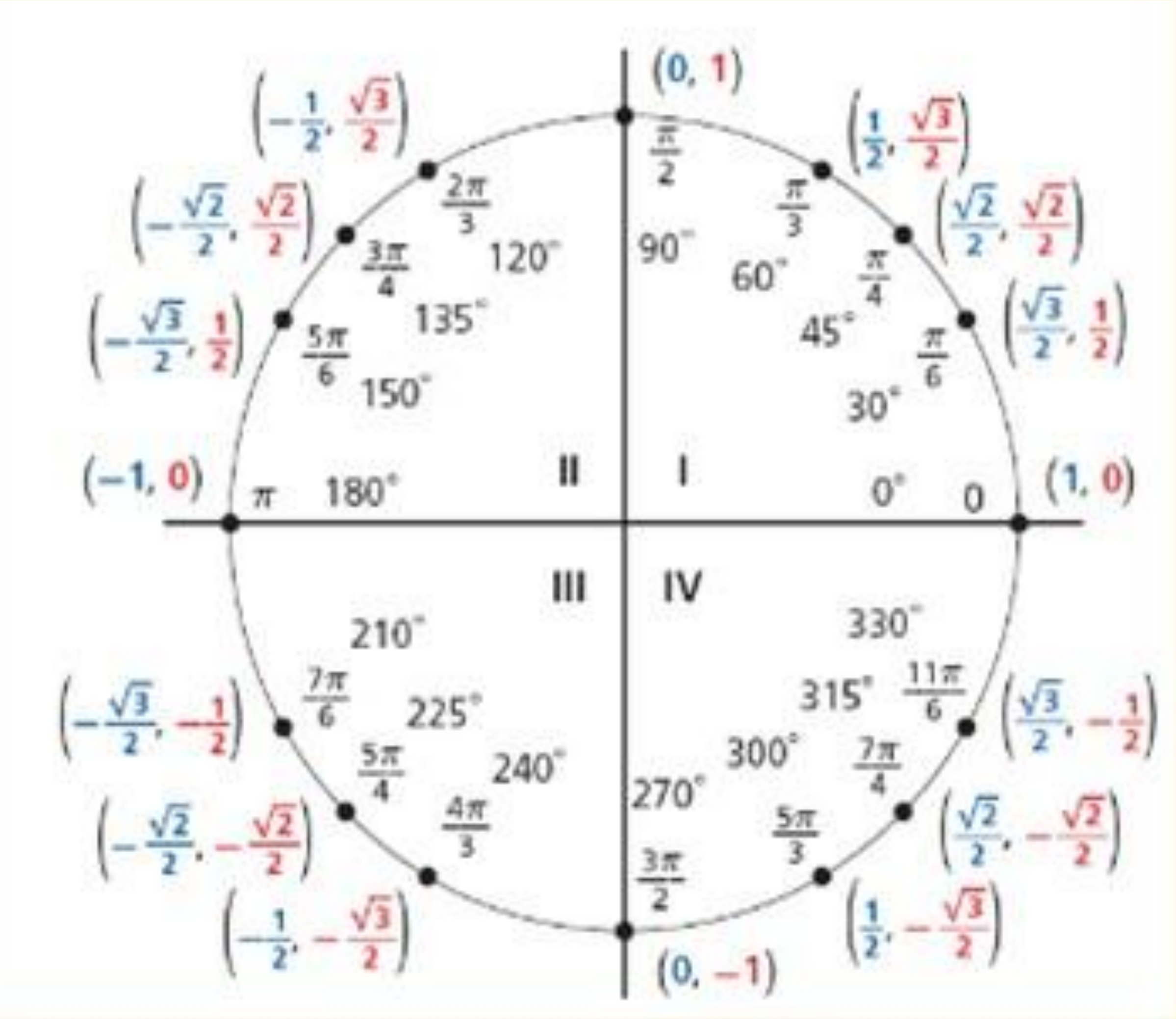
- Hallar la posición en el plano xy de un ángulo de $\frac{5\pi}{6}$
- $\cos\frac{5\pi}{6} = -0.866$
- $\sin\frac{5\pi}{6} = 0.5$ por tanto P(-0.866,0.5)
- - significa que está en el segundo cuadrante
- Nota. Tener cuidado con el signo.



Posición del ángulo $\frac{5\pi}{6}$ en el círculo

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi.180°}{6\pi} = 150°$$

- Los puntos del círculo se pueden asociar a los puntos P(x,y) del plano cartesiano. Conocido el ángulo se puede hallar sus coordenadas,



http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/misc_eso/applets/defcosi.htm
http://www.geogebra.org/en/upload/files/Ferito/Circulo_Unitario.html

- La ecuación del circulo unitario es
- $$x^2+y^2=1$$
- Y como $x=\cos\propto$
- $y=\sin\propto$

- $$sen^2\propto+cos^2\propto=1$$
- **Esta es una identidad fundamental de la trigonimetría**

Identidades trigonométricas

Identidades trigonométricas fundamentales

Identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades pares-impares

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

Identidades de cofunciones

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

Ejemplo 1 **Simplificación de una expresión trigonométrica**

Simplifique la expresión $\cos t + \tan t \operatorname{sen} t$.

Ejemplo 1 Simplificación de una expresión trigonométrica

Simplifique la expresión $\cos t + \tan t \operatorname{sen} t$.

Solución Primero volvemos a escribir la expresión en términos de seno y coseno.

$$\begin{aligned} \cos t + \tan t \operatorname{sen} t &= \cos t + \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right) \operatorname{sen} t && \text{Identidad recíproca} \\ &= \frac{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}{\cos t} && \text{Denominador común} \\ &= \frac{1}{\cos t} && \text{Identidad pitagórica} \\ &= \sec t && \text{Identidad recíproca} \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2 **Simplificación mediante combinación de fracciones**

Simplifique la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$.

Ejemplo 2 Simplificación mediante combinación de fracciones

Simplifique la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$.

Solución Combinamos las fracciones usando un denominador común.

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta) + \cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)} \qquad \text{Denominador común}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)} \qquad \text{Distribución de sen } \theta$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)} \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \qquad \text{Cancelación y uso de la identidad recíproca}$$

■

Ejemplo 3 **Demostración de una identidad mediante la reescritura en términos de seno y coseno**

Compruebe la identidad $\cos\theta\,(\sec\theta - \cos\theta) = \operatorname{sen}^2\theta$.

Ejemplo 3 Demostración de una identidad mediante la reescritura en términos de seno y coseno

Compruebe la identidad $\cos\theta\,(\sec\theta - \cos\theta) = \operatorname{sen}^2\theta$.

Solución El primer miembro se ve más complicado, así que iniciamos con él y tratamos de transformarlo en el segundo miembro.

$$
\begin{aligned}
\text{PM} &= \cos\theta\,(\sec\theta - \cos\theta) \\
&= \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) && \text{Identidad recíproca} \\
&= 1 - \cos^2\theta && \text{Desarrollo} \\
&= \operatorname{sen}^2\theta = \text{SM} && \text{Identidad pitagórica}
\end{aligned}
$$

■

Ejemplo 4 **Demostración de una identidad mediante la combinación de fracciones**

Verifique la identidad

$$2 \tan x \sec x = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$$

Ejemplo 4 Demostración de una identidad mediante la combinación de fracciones

Verifique la identidad

$$2 \tan x \sec x = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$$

Solución Mediante un común denominador y la combinación de las fracciones en el segundo miembro de esta ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{SM} &= \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} \\
&= \frac{(1 + \operatorname{sen} x) - (1 - \operatorname{sen} x)}{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)} && \text{Común denominador} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} && \text{Simplificación} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} && \text{Identidad pitagórica} \\
&= 2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x}\right) && \text{Factorización} \\
&= 2 \tan x \sec x = \mathrm{PM} && \text{Identidades recíprocas} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Ejemplo 5 **Demostración de una identidad mediante la introducción de un elemento extra**

Verificar la identidad $\dfrac{\cos u}{1 - \operatorname{sen} u} = \sec u + \tan u$.

Solución Empezamos con el primer miembro y multiplicamos numerador y denominador por $1 + \operatorname{sen} u$.

$$= \frac{\cos u}{1 - \operatorname{sen} u}$$

$$= \frac{\cos u}{1 - \operatorname{sen} u} \cdot \frac{1 + \operatorname{sen} u}{1 + \operatorname{sen} u}$$

Multiplicación del numerador y del denominador por 1 + sen u

$$= \frac{\cos u\,(1 + \operatorname{sen} u)}{1 - \operatorname{sen}^2 u}$$

Desarrollo del denominador

Fórmulas de adición y sustracción

Fórmulas para el seno:

$$\operatorname{sen}(s+t) = \operatorname{sen} s \cos t + \cos s \operatorname{sen} t$$

$$\operatorname{sen}(s-t) = \operatorname{sen} s \cos t - \cos s \operatorname{sen} t$$

Fórmulas para el coseno:

$$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$

$$\cos(s-t) = \cos s \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$

Fórmulas para la tangente:

$$\tan(s+t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$$

$$\tan(s-t) = \frac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$$

Ejemplo 3 Demostración de una identidad de cofunciones

Demuestre la identidad de cofunciones $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u$.

Fórmulas para el coseno: $\cos(s + t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$

$\cos(s - t) = \cos s \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$

Ejemplo 3 Demostración de una identidad de cofunciones

Demuestre la identidad de cofunciones $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u$.

Solución Por la fórmula de sustracción en el caso del coseno,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos u + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} u$$

$$= 0 \cdot \cos u + 1 \cdot \operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u$$

Ejemplo 4 **Demostración de una identidad**

Verifique la identidad $\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$.

Fórmulas para la tangente: $\tan(s + t) = \dfrac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$

$$\tan(s - t) = \frac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$$

Ejemplo 4 **Demostración de una identidad**

Verifique la identidad $\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$.

Solución Empezamos con el segundo miembro y usamos la fórmula de la adición para la tangente con lo que obtenemos

$$\text{SM} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan x}$$

$$= \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \text{PM} \qquad \blacksquare$$

Fórmulas mitad de ángulo o semiángulo

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}} \qquad \cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}$$

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1+\cos u}$$

La elección del signo + o − depende del cuadrante en el que se encuentre $u/2$.

Ejemplo 4 **Reducción de potencias en una expresión trigonométrica**

Exprese $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$ en términos de la primera potencia del coseno.

Solución Usamos en forma repetida las fórmulas para reducir la potencia.

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Ejemplo 4 **Reducción de potencias en una expresión trigonométrica**

Exprese $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$ en términos de la primera potencia del coseno.

Solución Usamos en forma repetida las fórmulas para reducir la potencia.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) \\
&= \frac{1-\cos^2 2x}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8} \\
&= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x = \frac{1}{8}(1-\cos 4x)
\end{aligned}$$

Fórmulas del producto-a-suma

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u - v)]$$

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$$

Ecuaciones trigonométricas

Una ecuación que contiene funciones trigonométricas se denomina **ecuación trigonométrica**. Por ejemplo, las expresiones siguientes son ecuaciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \qquad \tan^2 2x - 1 = 0$$

- http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/misc_eso/applets/defcosi.html
- http://www.geogebra.org/en/upload/files/Ferito/Circulo_Unitario.html

- http://www.vadenumeros.es/geogebra/geometria/goniometrica.html
- http://geogebra.geometriadinamica.org/construccion_de_las_razones_trigonometricas.html