Regla de L´hopital

Efrén Giraldo T.

❖**MIS VALORES**

Entrega

Transparencia

Simplicidad

y Persistencia

❖**MI VISIÓN:** Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖**MI MISIÓN:** Entrega a la Voluntad Suprema.

Servir a las personas.

- El valor de un límite cuya forma es $0/k$ o k/∞ es 0.

Teorema 4.5.2 Regla de L'Hôpital

Suponga que f y g son diferenciables sobre un intervalo abierto que contiene al número a, excepto posiblemente en a mismo, y que $g'(x) \neq 0$ para toda x en el intervalo salvo posiblemente en a. Si $\lim_{x \to a} f(x)/g(x)$ es una forma indeterminada, y $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x) = L$ o $\pm\infty$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (4)$$

$=L$

$\neq \mathbf{0}$

Es básicamente derivar el numerador y el denominador sucesivamente y aplicar el límite.

$$\text{si} \quad \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \text{entonces} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Al aplicar el límite directamente da la forma indeterminada 0/0, esto indica que es aplicable la regla de L'Hôpital para calcular el límite dado. Veamos:

Aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

1. Forma indeterminada $0/0$
2. Forma indeterminada ∞/∞
3. Límite por un lado
4. **La forma $0 \cdot \infty$** Si
5. **Otras formas indeterminadas**

EJEMPLO 1 Forma indeterminada 0/0

Evalúe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

1. Forma indeterminada 0/0

$x \longrightarrow a$

EJEMPLO 1 Forma indeterminada 0/0

Evalúe $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad g'(x) \neq 0 \qquad (4)$$

Solución Puesto que el límite dado tiene la forma indeterminada 0/0 en $x = 0$, por (4) es posible escribir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \stackrel{h}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x}{\frac{d}{dx}x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

EJEMPLO 2 Forma indeterminada 0/0

Evalúe $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}}$

Forma indeterminada 0/0

EJEMPLO 2 Forma indeterminada 0/0

Evalúe $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{0}{1-1} = \dfrac{0}{0}$

Solución Puesto que el límite dado tiene la forma indeterminada 0/0 en $x = 0$, se aplica (4):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}} \overset{h}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x}{\dfrac{d}{dx}(e^x - e^{-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (4)$$

El resultado proporcionado en (4) sigue siendo válido cuando $x \to a$ se sustituye por límites por un lado o por $x \to \infty$, $x \to -\infty$.

EJEMPLO 3 Forma indeterminada ∞/∞

Evalúe $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{e^x}$.

2. Forma indeterminada ∞/∞

$x \longrightarrow \infty$

EJEMPLO 3 Forma indeterminada ∞/∞

Evalúe $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x}$.

Solución Puesto que el límite dado tiene la forma indeterminada ∞/∞. Así, por la regla de L'Hôpital tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^x}.$$

En este último límite, $xe^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$, mientras 1 permanece constante. En consecuencia, por (2),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$$

EJEMPLO 4 Aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

Evalúe $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^2 + 5x + 7}{4x^2 + 2x}$.

Forma indeterminada ∞/∞

EJEMPLO 4 Aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

Evalúe $\lim_{x\to\infty} \dfrac{6x^2 + 5x + 7}{4x^2 + 2x}$.

Solución Resulta evidente que la forma indeterminada es ∞/∞, de modo que por (4),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2 + 5x + 7}{4x^2 + 2x} \stackrel{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{12x + 5}{8x + 2}.$$

Puesto que el nuevo límite sigue teniendo la forma indeterminada ∞/∞, aplicamos (4) por segunda vez:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{12x + 5}{8x + 2} \stackrel{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

EJEMPLO 5 Aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

Evalúe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^2}. = \dfrac{\infty}{\infty}$

Aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

EJEMPLO 5 Aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

Evalúe $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$. $= \frac{\infty}{\infty}$

Solución El límite dado y el límite obtenido después de una aplicación de la regla de L'Hôpital tienen la forma indeterminada ∞/∞:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{3x}}{2x} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{9e^{3x}}{2}.$$

Después de la segunda aplicación de (4), observamos que $e^{3x} \to \infty$ mientras el denominador permanece constante. A partir de ello concluimos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2} = \infty.$$

En otras palabras, el límite no existe. ■

EJEMPLO 6 Aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

Evalúe $\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{e^{2x}}$.

EJEMPLO 6 Aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

Evalúe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{e^{2x}}$.

Solución Aplicamos (4) cuatro veces:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^{2x}} &\stackrel{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3}{2e^{2x}} \quad (\infty/\infty)\\
&\stackrel{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{12x^2}{4e^{2x}} \quad (\infty/\infty)\\
&\stackrel{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{2e^{2x}} \quad (\infty/\infty)\\
&\stackrel{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6}{4e^{2x}} = 0.
\end{aligned}
$$

■

En aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital, algunas veces es posible cambiar un límite de una forma indeterminada a otra; por ejemplo, ∞/∞ a $0/0$.

EJEMPLO 7 Forma indeterminada ∞/∞

Evalúe $\lim\limits_{t \to \pi/2^+} \dfrac{\tan t}{\tan 3t}$. $= \dfrac{\infty}{\infty}$

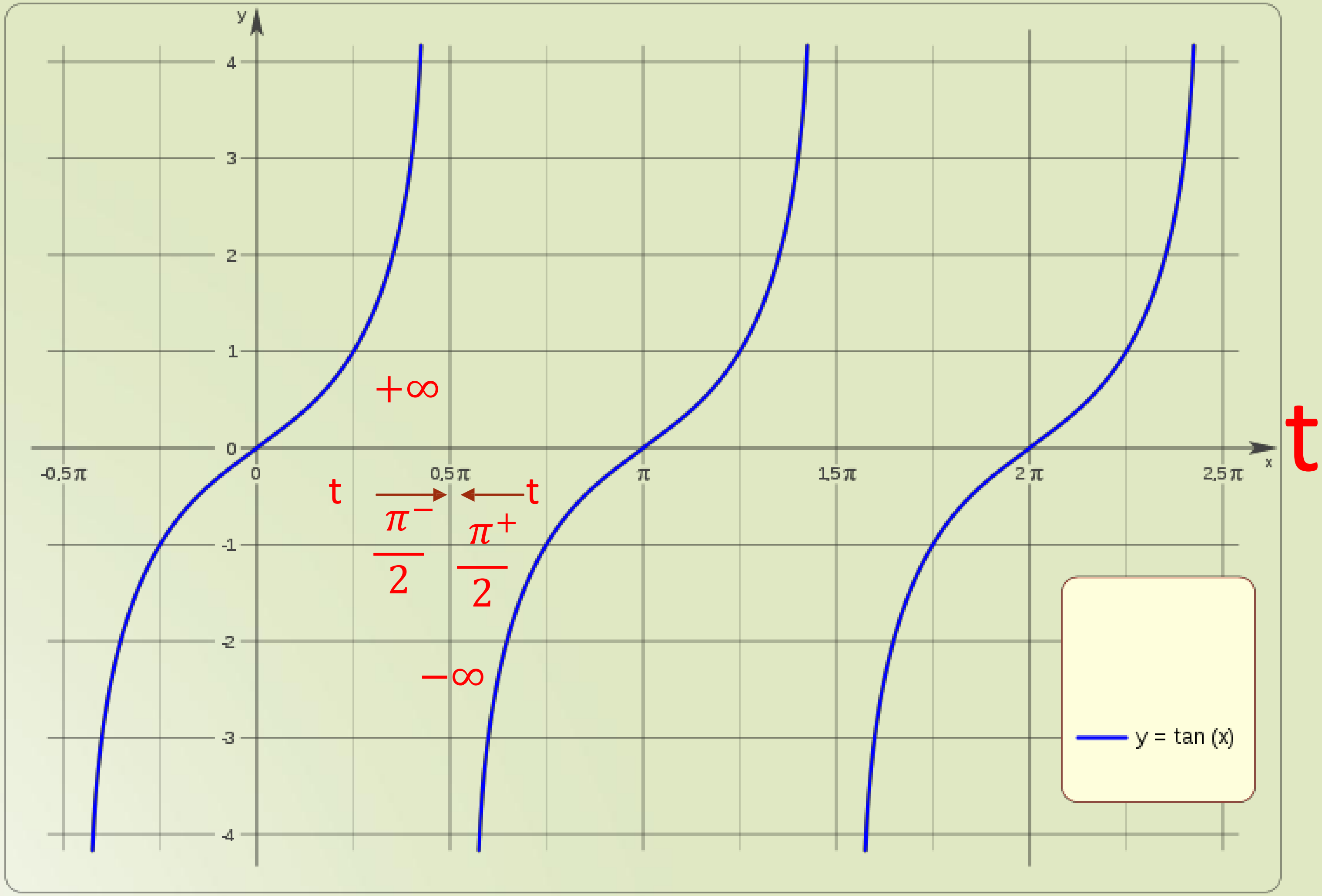

Gráfico de la función tangente.

Observe que cuando t tiende a $\frac{\pi^-}{2}$ la función tangente tiende a $+\infty, y$ cuando t tiende a $\frac{\pi^+}{2}$ la función tiende a $-\infty$

sen(2t) = 2 sen t cos t sen(2*3t) = 2 sen 3t cos sen(6t) = 2 sen 3t cos3t sec t = $\frac{1}{\cos t}$

EJEMPLO 7 Forma indeterminada ∞/∞

Evalúe $\lim_{t \to \pi/2^+} \frac{\tan t}{\tan 3t}$.

Se observa que $\tan t \to -\infty$ y $\tan 3t \to -\infty$ cuando $t \to \pi/2^+$. Entonces, por (4),

$$\lim_{t\to\pi/2^+} \frac{\tan t}{\tan 3t} \stackrel{h}{=} \lim_{t\to\pi/2^+} \frac{\sec^2 t}{3\sec^2 3t} \quad (\infty/\infty)$$

$$\frac{d \tan t}{dt} = sec^2\, t$$

$$= \lim_{t\to\pi/2^+} \frac{\cos^2 3t}{3\cos^2 t} \quad (0/0)$$

$$sec^2\, t = \frac{1}{cos^2\, t}$$

$$\frac{d(cos\, 3t)^2}{dt} = 2\cos 3t * \frac{d \cos 3t}{dt}$$

$$= 2\cos 3t * (-sen\, 3t)\, 3$$

$$= 2\cos 3t * (-3sen\, 3t)$$

$$\frac{d(cos\, t)^2}{dt} = 2\cos t * (-sen\, t)$$

$$\stackrel{h}{=} \lim_{t\to\pi/2^+} \frac{2\cos 3t(-3\,\mathrm{sen}\, 3t)}{3*2\cos t(-\mathrm{sen}\, t)}$$

$$= \lim_{t\to\pi/2^+} \frac{2\,\text{sen}\,3t\cos 3t}{2\,\text{sen}\,t\cos t}$$

$2\,sen\,3t\cos 3t = sen(6t)$

$2\,sen\,3t\cos 3t = sen(2t)$

$$= \lim_{t\to\pi/2^+} \frac{\text{sen}\,6t}{\text{sen}\,2t} \qquad (0/0)$$

$$\frac{d\,sen\;6t}{\text{dt}} = \cos 6t * 6$$

$$\frac{d\,sen\;2t}{\text{dt}} = \cos 2t * 2$$

$$\overset{h}{=} \lim_{t\to\pi/2^+} \frac{6\cos 6t}{2\cos 2t} = \frac{-6}{-2} = 3.$$

3. Límite por un lado

EJEMPLO 8 Límite por un lado

Evalúe $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$. $= \dfrac{0}{0}$

Límite por un lado

EJEMPLO 8 Límite por un lado

Evalúe $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$. $= \dfrac{0}{0}$

Solución El límite dado tiene la forma indeterminada $0/0$ en $x = 1$. Así, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x-1}} \stackrel{h}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{1/x}{\frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2\sqrt{x-1}}{x} = \frac{0}{1} = 0.$$

5. Otras formas indeterminadas

1) Forma indeterminada $\infty - \infty$

2) Forma indeterminada $0 \cdot \infty$

3) Forma indeterminada 0^0

4) Forma indeterminada 1^∞

5) Forma indeterminada ∞^0

■ **Otras formas indeterminadas** Hay cinco formas indeterminadas adicionales:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0 \quad \text{y} \quad 1^\infty. \tag{5}$$

Por medio de una combinación de álgebra y un poco de astucia a menudo es posible convertir una de estas nuevas formas de límites ya sea a $0/0$ o a ∞/∞.

1) Forma indeterminada $\infty - \infty$

La forma $\infty - \infty$ El siguiente ejemplo ilustra un límite que tiene la forma indeterminada $\infty - \infty$. Este ejemplo debe anular cualquier convicción garantizada de que $\infty - \infty = 0$.

EJEMPLO 9 Forma indeterminada $\infty - \infty$

Evalúe $\lim_{x \to 0^+} \left[\dfrac{3x + 1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x} \right]$.

EJEMPLO 9 Forma indeterminada $\infty - \infty$

Evalúe $\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{3x+1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right]$.

Solución Se observa que $(3x+1)/\operatorname{sen} x \to \infty$ y $1/x \to \infty$ cuando $x \to 0^+$. No obstante, después de escribir la diferencia como una fracción simple, se identifica la forma 0/0:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{3x+1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right] &= \lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2+x-\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x} \qquad \leftarrow \text{común denominador}\\
&\overset{h}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{6x+1-\cos x}{x\cos x+\operatorname{sen} x}\\
&\overset{h}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{6+\operatorname{sen} x}{-x\operatorname{sen} x+2\cos x}\\
&= \frac{6+0}{0+2} = 3.
\end{aligned}
$$

■

2) Forma indeterminada $0 \cdot \infty$

La forma $0 \cdot \infty$ Si

$$f(x) \to 0 \quad \text{y} \quad |g(x)| \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a,$$

entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)$ tiene la forma indeterminada $0 \cdot \infty$. Un límite que tiene este forma puede cambiarse a uno con la forma $0/0$ o ∞/∞ al escribir, a su vez,

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} \quad \text{o bien,} \quad f(x)g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

EJEMPLO 10 Forma indeterminada $0 \cdot \infty$

Evalúe $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$.

Solución Puesto que $1/x \to 0$, tenemos $\operatorname{sen}(1/x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Por tanto, el límite tiene la forma indeterminada $0 \cdot \infty$. Al escribir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x}$$

ahora tenemos la forma $0/0$. Entonces,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} \stackrel{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(-x^{-2})\cos(1/x)}{(-x^{-2})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \cos\frac{1}{x} = 1.$$

En la última línea se usó el hecho de que $1/x \to 0$ cuando $x \to \infty$ y $\cos 0 = 1$. ■

Indeterminaciones de tipo $\Rightarrow 1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$

Para resolver estas indeterminaciones tomamos logaritmos neperianos.

El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base $\Rightarrow \ln a^{b} = b \ln a$. De esta forma conseguimos bajar el exponente y resolver el límite.

http://www.vadenumeros.es/segundo/limites-regla-de-lhopital.htm

3) Forma indeterminada 0^0

EJEMPLO 11 Forma indeterminada 0^0

Evalúe $\lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln x}$.

Solución Ya que $\ln x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$, por (2) concluimos que $1/\ln x \to 0$. Así, el límite dado tiene la forma indeterminada 0^0. Luego, si se hace $y = x^{1/\ln x}$, entonces

$$\ln y = \frac{1}{\ln x}\ln x = 1.$$

Observe que en este caso no es necesaria la regla de L'Hôpital, ya que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \qquad \text{o bien,} \qquad \ln\left(\lim_{x\to 0^+} y\right) = 1.$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0^+} y = e^1$ o de manera equivalente, $\lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln x} = e$. ■

4) Forma indeterminada 1^{∞}

Indeterminación 1^{∞}

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = 1^{\infty}$$

$$A = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$$

- Tomamos logaritmos neperianos en ambos miembros.

$$\ln A = \ln \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$$

http://www.vadenumeros.es/segundo/limites-regla-de-lhopital.htm

- Aplicamos el logaritmo neperiano de una potencia que es igual al exponente por el logaritmo neperiano de la base de la potencia.

$$\boxed{\ln a^b = b \cdot \ln a}$$

$$\ln A = \ln \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \overbrace{(1 + 2\cos x)}^{a}{}^{\overbrace{\frac{1}{\cos x}}^{b}}$$

$$\ln A = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} \right) \cdot \ln(1 + 2\cos x)$$

$$\ln A = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + 2\cos x)}{\cos x}$$

http://www.vadenumeros.es/segundo/limites-regla-de-lhopital.htm

- Calculamos el límite cuando $x \to \frac{\pi}{2}$ y resolvemos la indeterminación resultante.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+2\cos x)}{\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = (\text{L`Hôpital}) =$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{-2\operatorname{sen} x}{1+2\cos x}}{-\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2}{1+2\cos x} = 2$$

- Definición de logaritmo para calcular A

$$\ln A = 2 \Leftrightarrow e^2 = A$$

Solución: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = e^2$

http://www.vadenumeros.es/segundo/limites-regla-de-lhopital.htm

EJEMPLO 12 Forma indeterminada 1^∞

Evalúe $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}$.

Solución Ya que $1 - 3/x \to 1$ cuando $x \to \infty$, la forma indeterminada es 1^∞. Si

$$y = \left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x} \quad \text{entonces} \quad \ln y = 2x\ln\left(1-\frac{3}{x}\right).$$

Observe que la forma de $\lim_{x\to\infty} 2x\ln(1-3/x)$ es $\infty \cdot 0$, mientras la forma de

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

es $0/0$. Al aplicar (4) al último límite y simplificar obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} 2\frac{\ln(1-3/x)}{1/x} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} 2\frac{\frac{3/x^2}{(1-3/x)}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{-6}{(1-3/x)} = -6.$$

A partir de $\lim_{x\to\infty}\ln y = \ln\left(\lim_{x\to\infty} y\right) = -6$ concluimos que $\lim_{x\to\infty} y = e^{-6}$ o

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x} = e^{-6}.$$

5) Forma indeterminada ∞^0

Indeterminación ∞^0

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\tan x} = \infty^0$$

Aplicamos lo mismo que hicimos para resolver 0^0

$$\ln A = \lim_{x\to 0^+} \tan x \cdot \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \tan x \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+} \tan x\ (\ln 1 - \ln x^2)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \tan x\ (-\ 2\ln x) = -2\lim_{x\to 0^+} \tan x\ (\ln x) = (0\cdot\infty)$$

$$-2\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/\tan x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = (\text{L`Hôpital}) =$$

$$-2\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/\text{sen}^2 x} = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}^2 x}{x} =$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) = (\text{L`Hôpital}) = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{2\text{sen}x\cos x}{1} = 2\cdot 0 = 0$$

$$\ln A = 0 \iff e^0 = A \quad \to A = 1$$

Solución: $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\tan x} = 1$

http://www.vadenumeros.es/segundo/limites-regla-de-lhopital.htm

Resolver el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\ln(\cos 3x)}^{u_1}}{\underbrace{ln(\cos 2x)}_{u_2}} \quad (1)$$

$$\text{Sea} \quad u_1 = \cos 3x, \quad (2)$$

$$\frac{du_1}{dx} = -sen\,3x * 3 \quad (3)$$

$$u_2 = \cos 2x, \quad (4)$$

$$\frac{du_2}{dx} = -sen\,2x * 2 \quad (5)$$

L´Hopital

(2) y (4) en (1)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln u_1}{ln\, u_2} = \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\ln u_1}{\frac{d}{dx} ln\, u_2} =$$

Aplicando la derivada ***de ln u***= $\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx}}{\frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx}} =$$

Reemplazando (3) y (5)

$$\frac{\frac{1}{u}(-sen\ 3x*3)}{\frac{1}{u_2}(-sen\ 2x*2)} =$$

Reemplazando (2) y (4)

$$= \frac{\frac{1}{\cos 3x}(-sen\ 3x*3)}{\frac{1}{\cos 2x,}(-sen\ 2x*2)}$$

Reorganizando términos

$$\frac{-3\dfrac{sen\ 3x}{\cos 3x}}{\dfrac{-2\ sen\ 2x}{\cos\ 2x,}} =$$

$$= \frac{3\tan 3x}{2\tan 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\tan 3x}{2\tan 2x} =$$

Aplicando L´Hopital nuevamente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(3\tan 3x)}{\frac{d}{dx}(2\tan 2x)}=$$

$$sec\,(o)=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3sec^2(3x)*3}{2sec^2(2x)*2}=\quad\frac{9}{4}$$