Análisis de gráficos de funciones con base en primera y segunda derivadas

2

❖MIS VALORES

Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

❖**MI VISIÓN:** Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖**MI MISIÓN:** Entrega a la Voluntad Suprema. Servir a las personas.

Conceptos previos

- Se requiere factorizar expresiones de la forma: $ax^2 + bx + c = 0,\ 3x^2 + 11x - 20 = 0.$
    - Se requiere aplicar y conocer el método de las cruces o cementerio.

$$3x^2 + 11x - 20 = 0$$

$3x^2 + 11x - 20 \quad = \dfrac{9x^2 + 11(3x) - 60}{3}$

Se multiplica y ÷ por 3

Factores primos de 60 (2 *2 * 3 * 5),
Dos números que multiplicados den -60 y sumados den 11.
Esos son 15 y -4

$$= \frac{(3x - 4)*(3x + 15)}{3}$$

Se observa que 3 es factor común en segundo paréntesis por tanto se puede sacar y como es factor se simplifica.

$$= \frac{(3x - 4)*3(x + 5)}{3} == (3x - 4) * (x + 5)$$

$$(3x - 4) * (x + 5) = 3x^2 - 4x + 15x - 20 = 3x^2 + 11x - 20$$

Funciones crecientes y decrecientes

Es muy útil saber en dónde sube la gráfica y en dónde baja. La gráfica que se ve en la Figura 4 sube, baja y luego sube de nuevo a medida que avanzamos de izquierda a derecha: sube de A a B, baja de B a C y sube otra vez de C a D. Se dice que la función f es *creciente* cuando su gráfica sube y *decreciente* cuando baja.

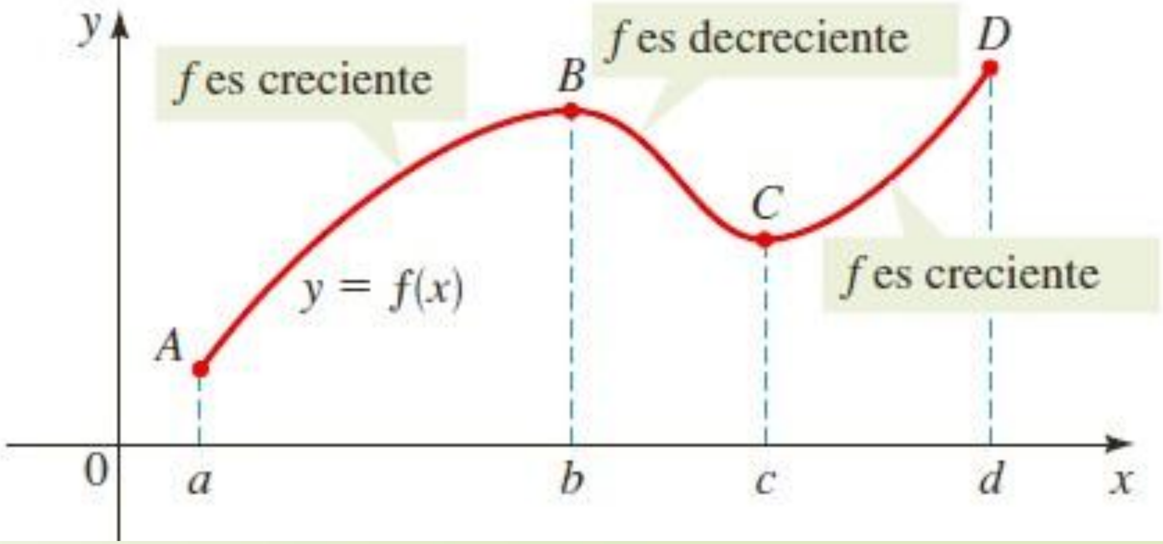


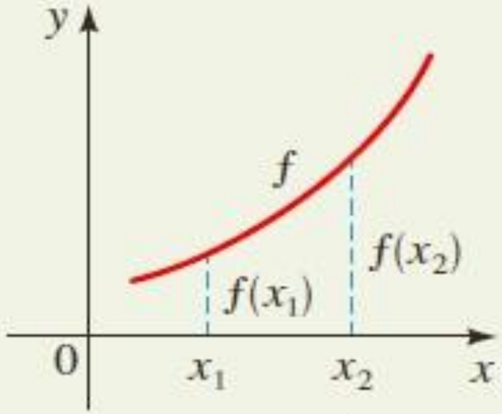
FIGURA 4 f es creciente en $[a, b]$ y $[c, d]$. f es decreciente en $[b, c]$.

(Stewart, Redlin y Watson, 2012)

DEFINICIÓN DE FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

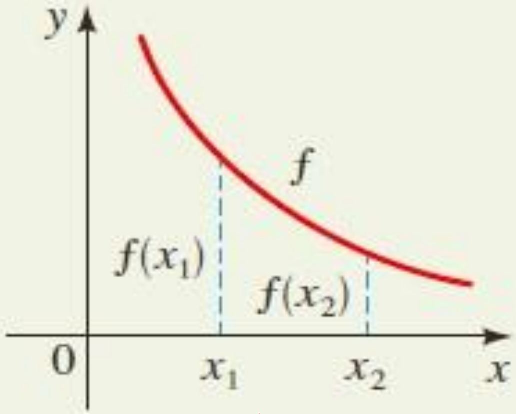
f es **creciente** en un intervalo *I* si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en *I*.

f es **decreciente** en un intervalo *I* si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en *I*.



$\boldsymbol{x_2 > x_1 \longrightarrow y_2 > y_1}$

f es creciente



$\boldsymbol{x_2 > x_1 \longrightarrow y_2 < y_1}$

f es decreciente

La función es creciente si para un valor de x_2 mayor que otro valor x_1, se cumple que f(x_2) es mayor que f(x_1).
La función es decreciente si para un valor de x_2 menor que otro valor x_1, se cumple que f(x_2) es menor que f(x_1).
Una función es creciente si “sube” y decreciente si “baja”.

EJEMPLO 3 | Intervalos en los que una función crece y decrece

La gráfica de la Figura 5 da el peso W de una persona a la edad x. Determine los intervalos en los que la función W es creciente y en los que es decreciente.

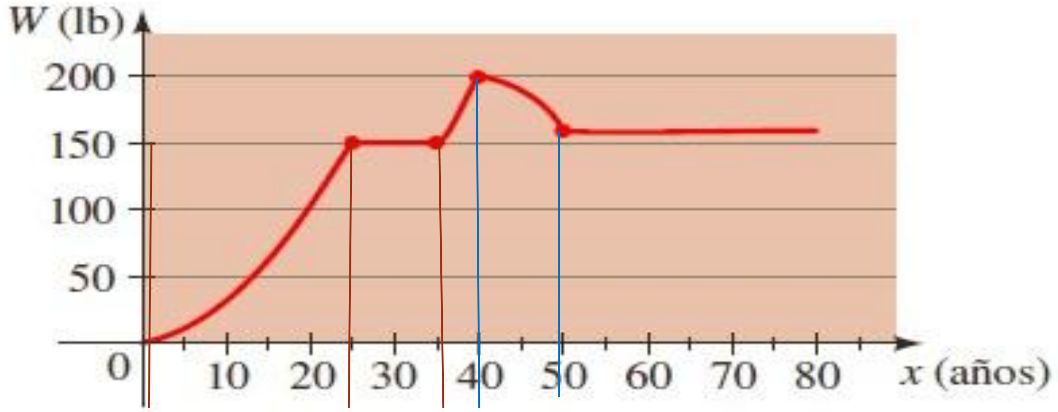
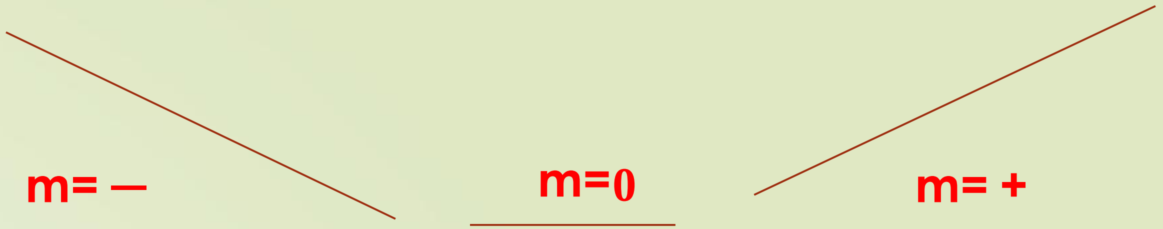


FIGURA 5 El peso como función de la edad

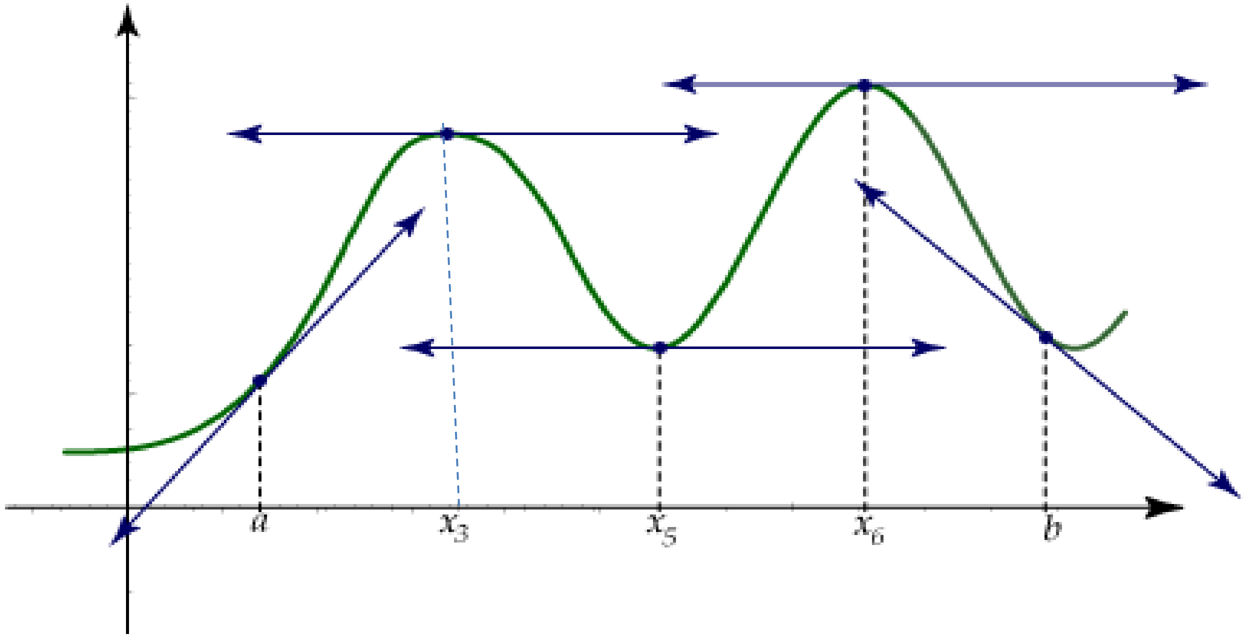
SOLUCIÓN La función W es creciente en $[0, 25]$ y $[35, 40]$. Es decreciente en $[40, 50]$. La función W es constante (ni creciente ni decreciente) en $[25, 30]$ y $[50, 80]$. Esto significa que la persona aumentó de peso hasta la edad de 25, luego aumentó de peso otra vez entre las edades de 35 y 40. Bajó de peso entre las edades de 40 y 50.



No olvidar que una pendiente es negativa –, si la línea va inclinada a la izquierda

Y es positiva si va inclinada a la derecha. Es cero si es horizontal.

La derivada es la pendiente de la línea tangente a la curva en un punto dado.

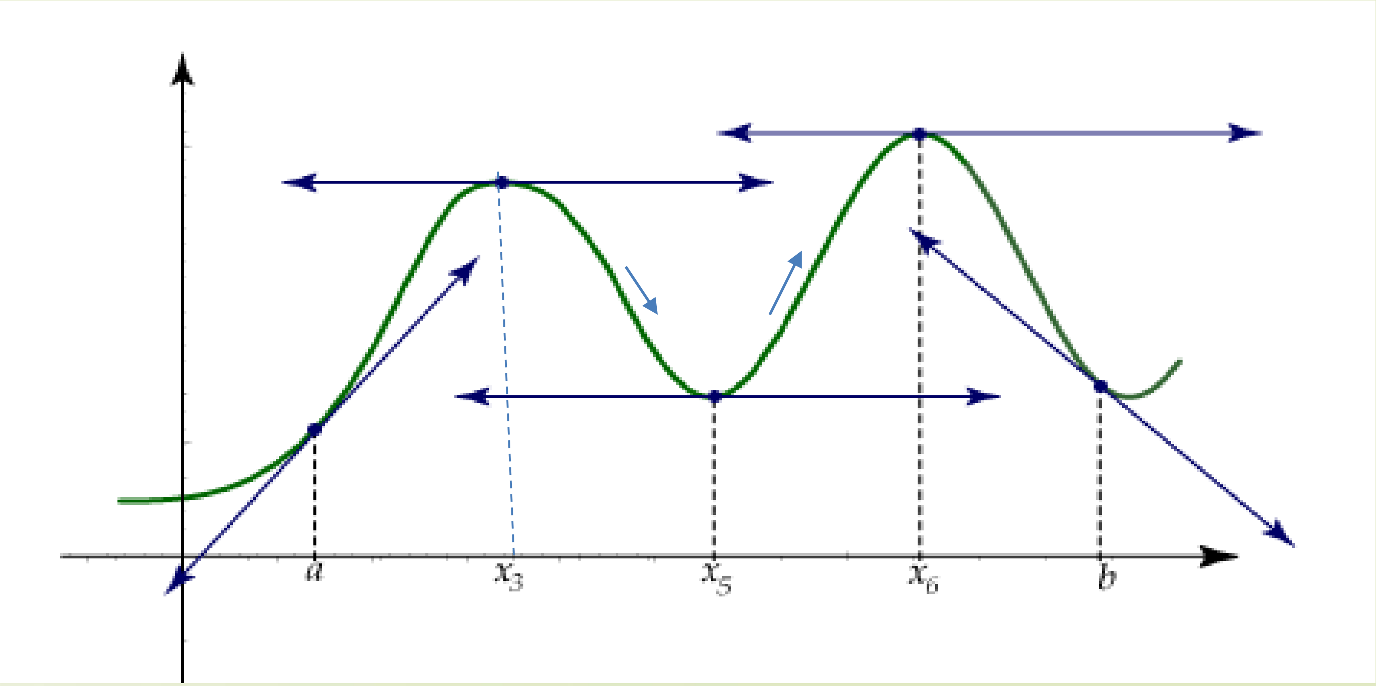


En la representación gráfica anterior puede observarse que la función *f* es:

1. Creciente en los intervalos $]a, x_3[$, $]x_5, x_6[$
2. Decreciente en los intervalos $]x_3, x_5[$, $]x_6, b[$

También se tiene que cuando la pendiente de la recta tangente es positiva, la función *f* crece; y cuando la pendiente de la recta tangente es negativa, la función decrece.

Note además que en los puntos $(x_3, f(x_3))$, $(x_5, f(x_5))$ y $(x_6, f(x_6))$ la recta tangente es horizontal, por lo que su pendiente es cero, es decir, la primera derivada de la función se anula en cada uno de esos puntos.



- ***Si la primera derivada es positiva para un intervalo dado, entonces la función es creciente en ese intervalo.***
- ***Si la primera derivada es negativa para un intervalo dado, entonces la función es decreciente en ese intervalo.***

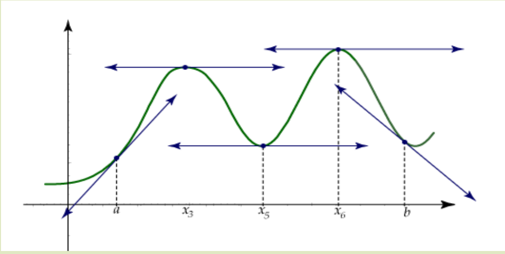
- *Si la primera derivada pasa de + (creciente) a − (decreciente), se tiene un máximo.*
- *Si la primera derivada pasa de − (decreciente) a + (creciente) se tiene un mínimo.*

Hallar el signo de la siguiente función en un intervalo dado: Puntos críticos. Intervalos donde crece y decrece.

$$f(x) = y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$$

$$f(x) = y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$$

- Se repasa el método de las cruces o cementerio.
- Se aplica a la primera derivada: $f' = 3x^2 - 6x - 9$
- Se factoriza $f' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$
- Hallar el signo de la expresión $3(x+1)(x-3)$ y los intervalos donde crece y decrece. También donde tiene valores máximos y mínimos.



$$f' = 3x^2 - 6x - 9$$

Factorizando $\quad 3(x+1)(x-3) = 0 \qquad x = -1 \quad x = 3$ son los puntos críticos

	$-\infty$	-1	0	3	∞
Signo de $(x+1)$	- - -		+++++		+++++
Signo de $(x-3)$	- - -		- - - - -		+++++
Signo de $(\boldsymbol{x+1})(\boldsymbol{x-3})$	++++		- - - - - - - --- -		+++++
Donde f ´es +, f es creciente,	$f(x)$ creciente		$f(x)$ decreciente		creciente

máxino en -1

mínimo 3

En -1 se pasa de creciente a decreciente
En -1 se tiene un máximo.

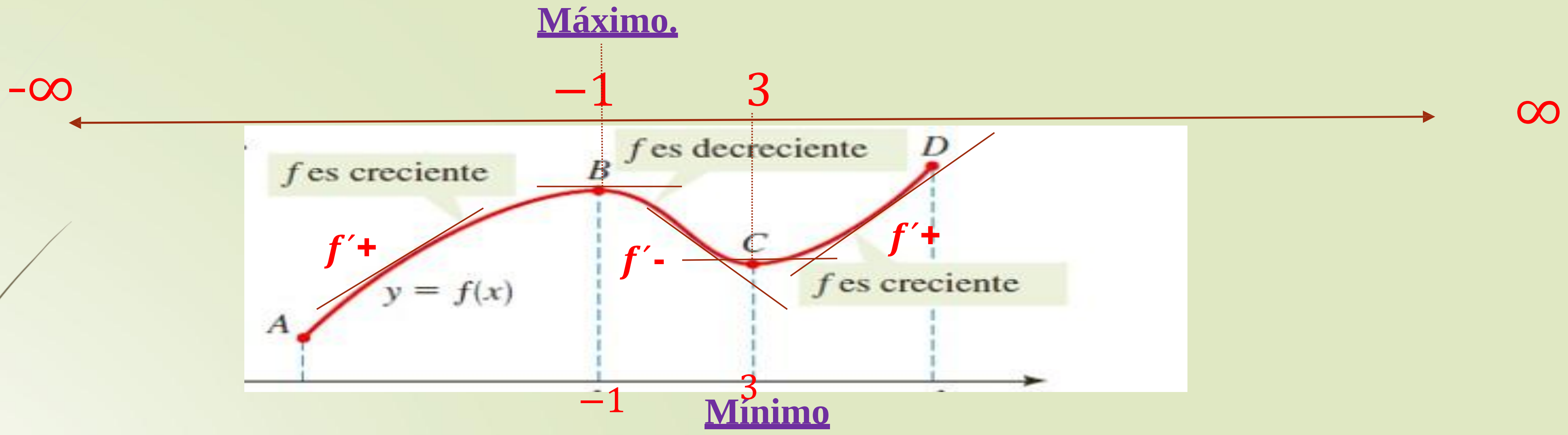
En 3 se pasa de decreciente a creciente
En 3 se tiene un mínimo.

$f(-1) = -1^3 - 3(-1)^2 \text{-} 9(-1) + 2$

$f(-1) = 7$ $P(-1,7)$ Punto de máximo

$f(3) = 3^3 - 3(3)^2 \text{-} 9(3) + 2 = -25$ $P(3,-25)$ Punto de mínimo

Por ahora, con la información anterior podríamos trazar el gráfico aproximado de $f(x) = y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$



Note que entre AB ***f´ es +***, la función original crece.

En B ***f´* es 0**, la pendiente es 0, la línea recta es horizontal. Se pasa de creciente a decreciente: un Máximo.

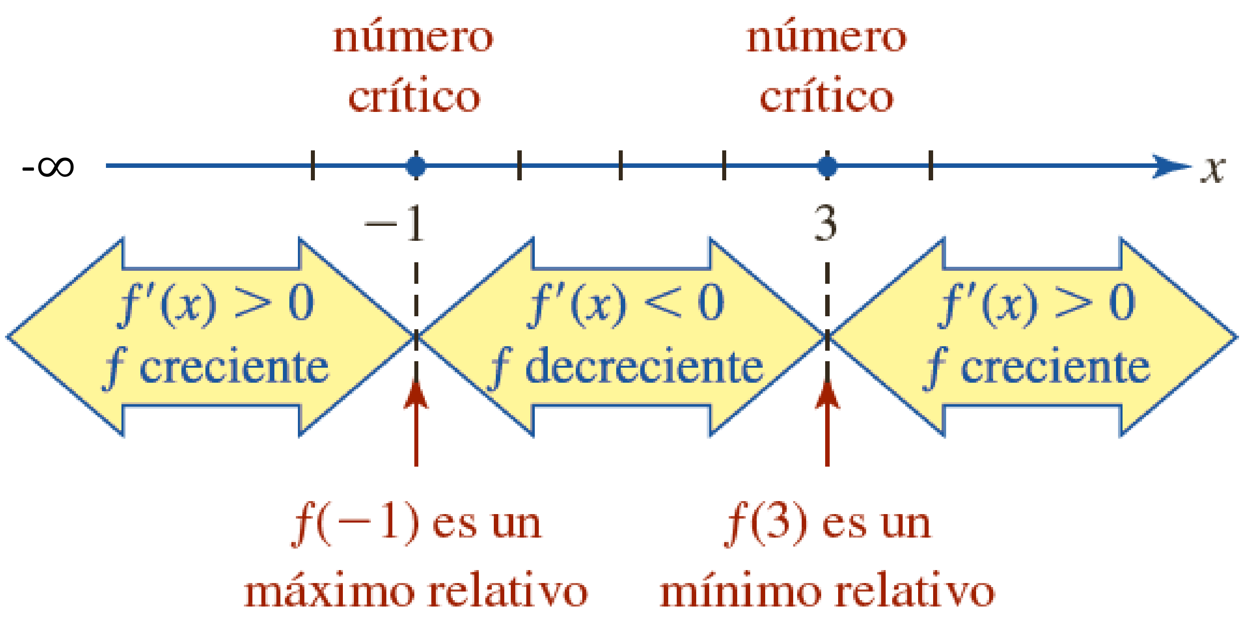
Entre B y C ***f´* es -**, la función original decrece.

En C la pendiente es cero, línea es horizontal. La función pasa de decreciente a creciente: un Mínimo.

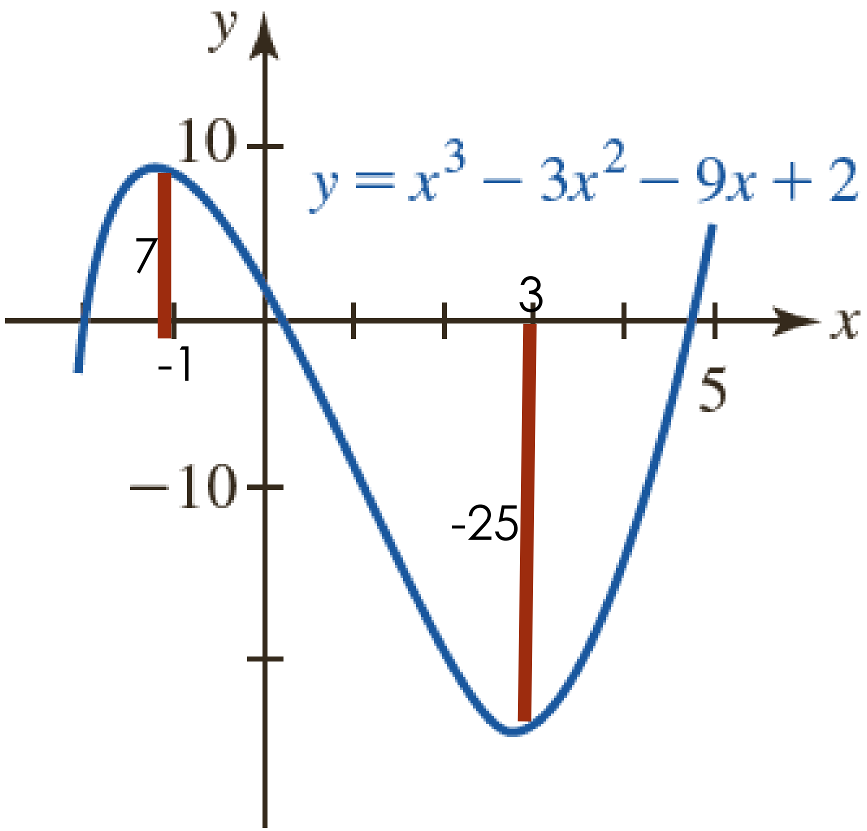
Entre C y D la ***f´*es +**, la función original crece.

Además, observe que entre AC la concavidad se abre hacia abajo. Y entre B y D se abre hacia arriba.

13



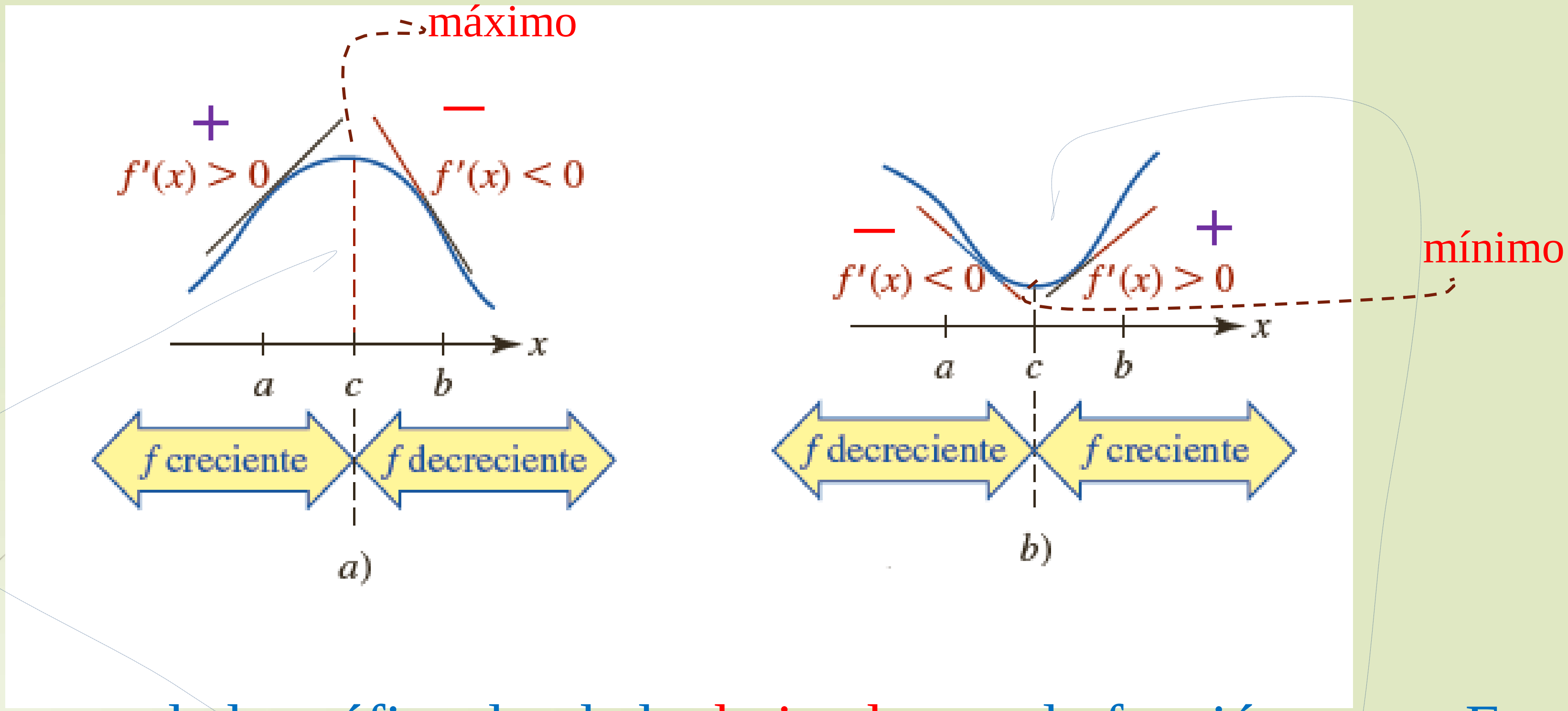
a) Prueba de la primera derivada



Gráficas y la primera derivada

- Entonces, resumiendo: desde el punto de vista de la primera derivada una función es creciente, cuando su derivada es +.

- Y desde el punto de vista de la primera derivada es decreciente, cuando la primera derivada es –



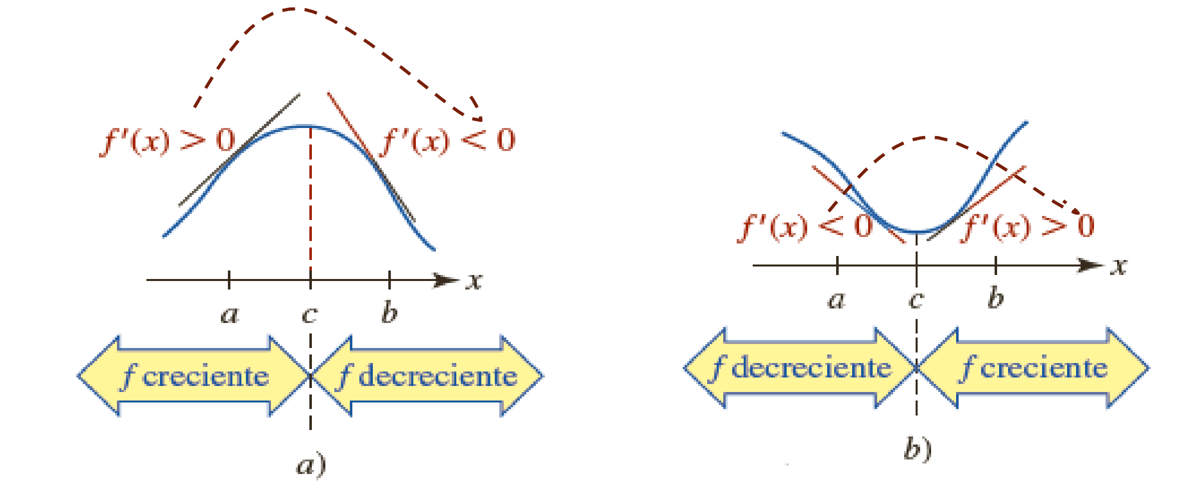
En los puntos de la gráfica donde la derivada es + la función crece. En el punto de cambio de creciente a decreciente se da un máximo. Y la función tiene concavidad abierta hacia abajo.

En los puntos de la gráfica donde la derivada es –, la función decrece. Y en punto de cambio existe un mínimo. Y también se observa que la función tiene concavidad abierta hacia arriba.

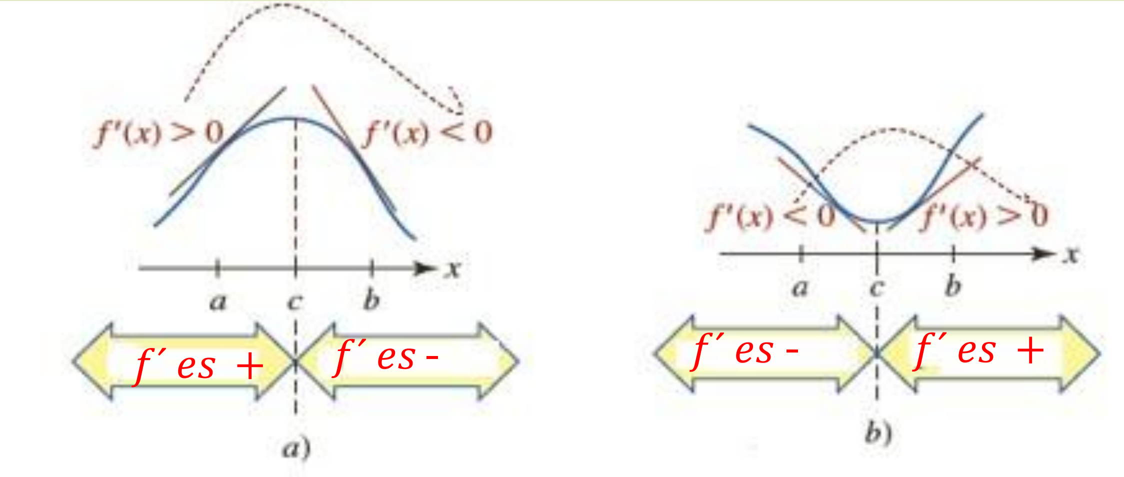
Aclarando más:

▼ Valores máximo y mínimo locales de una función

Hallar los valores máximo y mínimo de una función es importante en numerosas aplicaciones. Por ejemplo, si una función representa ingreso o utilidad, entonces estamos interesados en su valor máximo. Para una función que representa costo, desearíamos hallar su valor mínimo. (Vea *Enfoque sobre el modelado*: *Modelado con funciones* en las páginas 213-222 para muchos otros ejemplos.) Fácilmente podemos hallar estos valores a partir de la gráfica de una función. Primero definimos qué queremos decir con un máximo o mínimo locales.



Máximo relativo Mínimo relativo



Máximo relativo Mínimo relativo

Teorema 4.6.1 Prueba de la primera derivada

Sea f continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b) excepto tal vez en el número crítico c.

creciente a decreciente

i) Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c, entonces $f(c)$ es un máximo relativo.

ii) Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.

decreciente a creciente

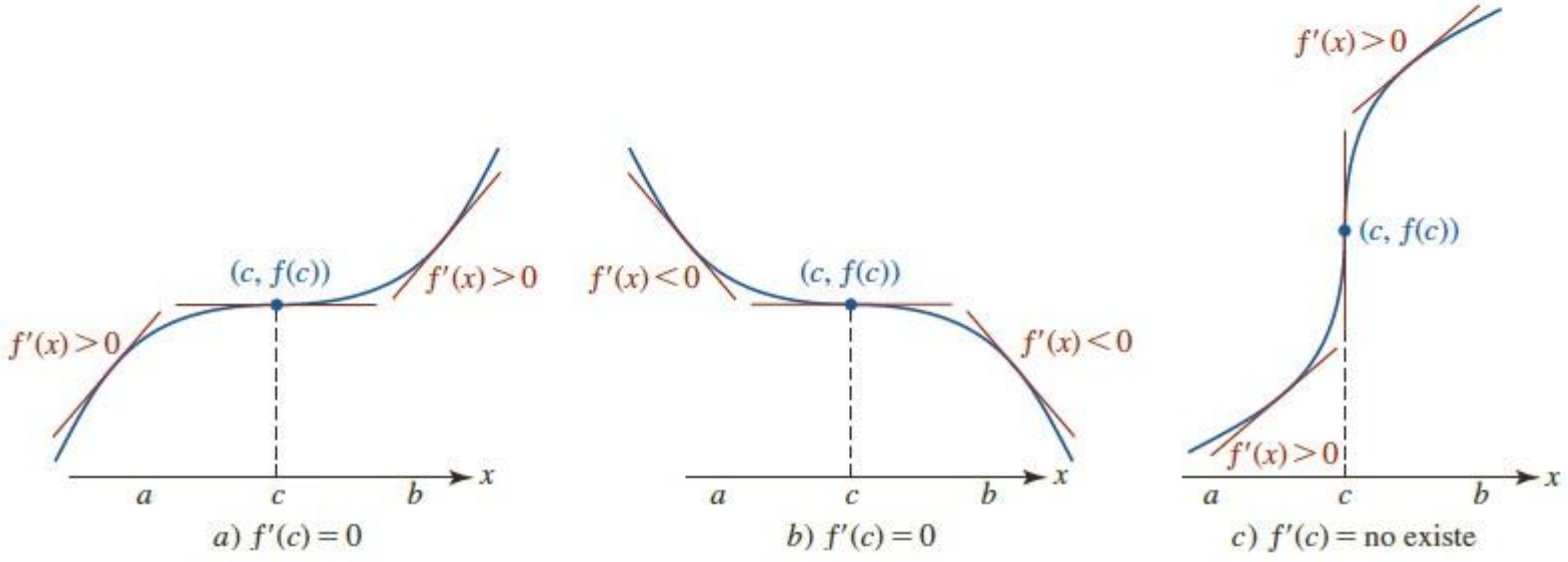
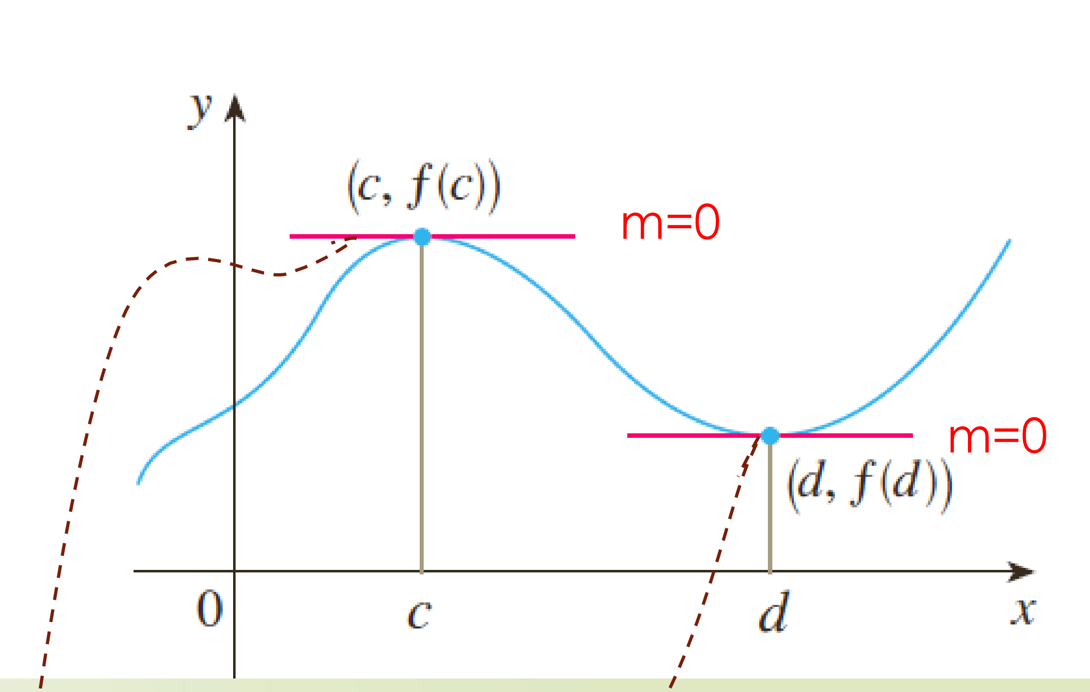


FIGURA 4.6.2 $f'(x)$ no cambia de signo en el número crítico c

No hay máximos o mínimos: no hay paso de creciente a decreciente o viceversa.

Este otro concepto complementa el anterior



$\boxed{4}$ **Teorema de Fermat** Si f tiene un máximo o un mínimo local en $x = c$, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$

La pendiente debe ser cero en los puntos de máximos y mínimos; si la función tiene derivada, esa derivada debe ser cero. ***Lo contrario no es cierto: si la pendiente es cero, el punto siempre es de máximo o mínimo.***

Un punto donde la pendiente es cero y no es ni máximo ni mínimo.
La derivada no pasa de + a —

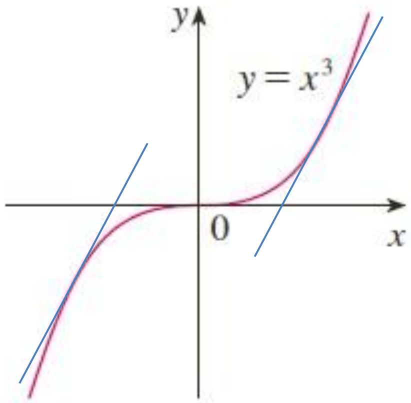


FIGURA 11 Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(0) = 0$, pero f no tiene máximo ni mínimo.

en x=0 la derivada también es 0

EJEMPLO 5 Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$, de modo que $f'(0) = 0$. Pero f no tiene máximo o mínimo en $x = 0$, como puede ver en la gráfica de la figura 11. (O bien, observe que $x^3 > 0$ para $x > 0$, pero $x^3 < 0$ para $x < 0$. El hecho de que $f'(0) = 0$ sólo significa que la curva $y = x^3$ tiene una recta tangente horizontal en $(0, 0)$. En lugar de tener un máximo o un mínimo en $(0, 0)$, allí cruza la curva su recta tangente horizontal.

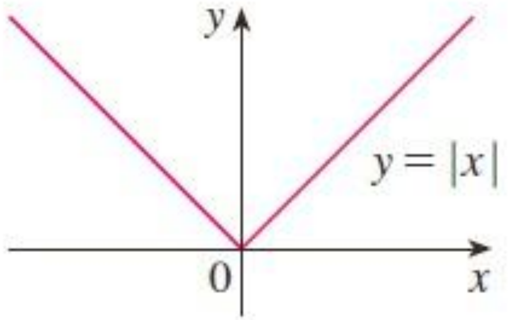


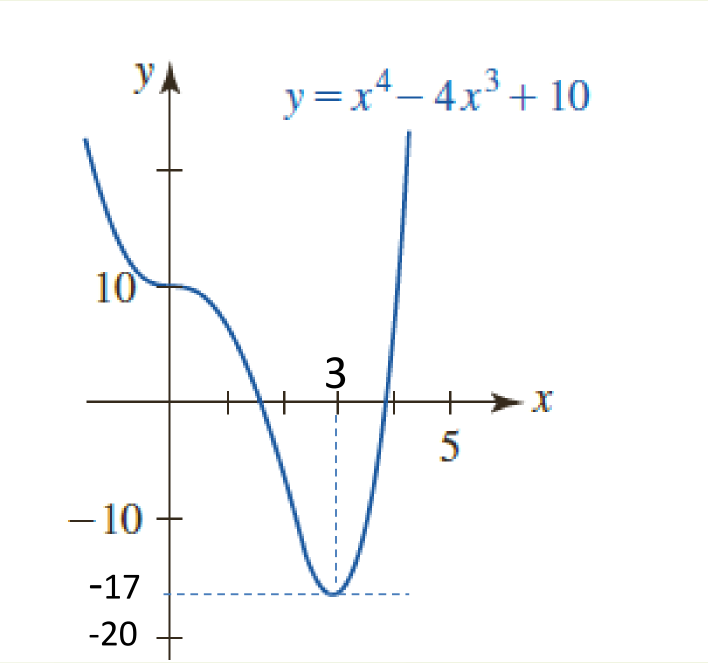
FIGURA 12 Si $f(x) = |x|$, entonces $f(0) = 0$ es un valor mínimo, pero $f'(0)$ no existe.

EJEMPLO 6 La función $f(x) = |x|$ muestra un valor mínimo (local y absoluto) en $x = 0$, pero ese valor no puede determinarse haciendo $f'(x) = 0$ porque, como ya se demostró en el ejemplo 5 de la sección 2.8, $f'(0)$ no existe (véase la figura 12).

En cero se da un pico de la función (un cambio brusco de la función) y no tiene derivada. Sin embargo existe un valor mínimo: la función pasa de decreciente a creciente. ***Este concepto es más determinante***. No obstante, es importante el criterio de f´=0.

PRECAUCIÓN Los ejemplos 5 y 6 demuestran que debe ser cuidadoso al aplicar el teorema de Fermat. El ejemplo 5 demuestra que aun cuando $f'(c) = 0$, no necesariamente hay un máximo o un mínimo en $x = c$. (En otras palabras, el inverso del teorema de Fermat es en general falso.)

Hallar para la siguiente función: intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, intersecciones si se da la gráfica.



EJEMPLO 2 Función polinomial de grado 4

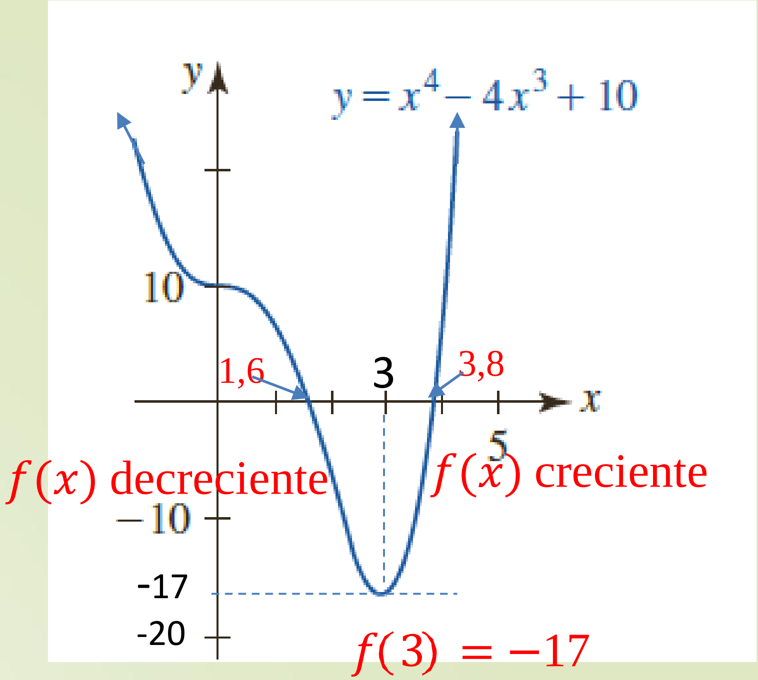
$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10.$$

Solución La derivada

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$

Para la función y= $x^4 - 4x^3$ +10 *la gráfica* es la siguiente:

31

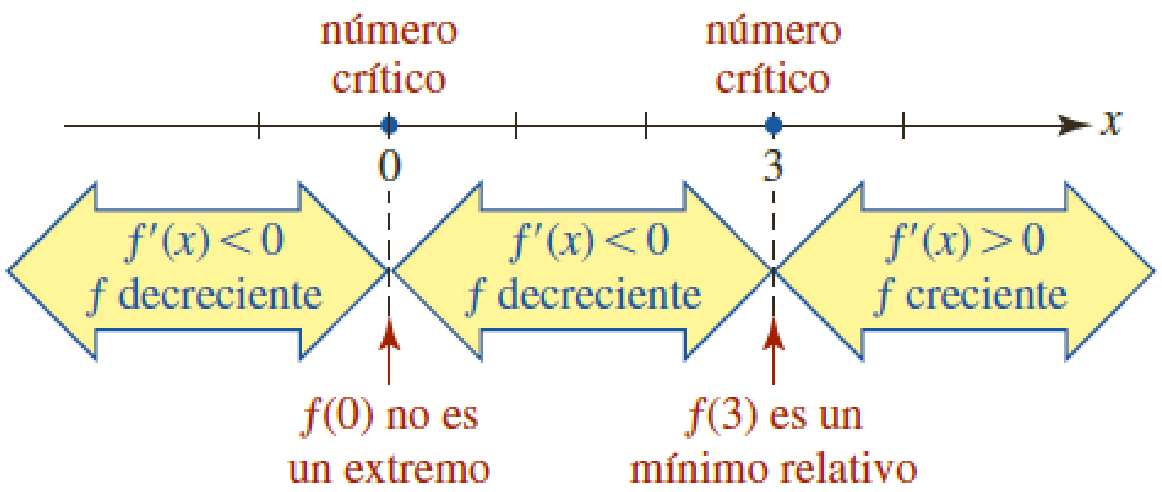


De la gráfica se deducen los intervalos de crecimiento y decrecimiento. En efecto, la información de que f es decreciente por el lado izquierdo y creciente por el lado derecho del número crítico 3 (la gráfica de f no puede retroceder) permite concluir que $f(3) = -17$ también es un *mínimo absoluto*. Por último, vemos que la gráfica de f tiene dos intersecciones x: 1,6 y 3,8

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3) = 0$$

Compruebe Ud. el siguiente gráfico por el método del cementerio, halle los signos de x^2 $y\ de\ (x-3)$ y el signo de $4x^2(x-3)$. No olvidar que el signo de x^2 siempre es +.

muestra que los números críticos son 0 y 3. Luego, como se observa en la FIGURA 4.6.4a), f' tiene el mismo signo algebraico negativo en los intervalos adyacentes $(-\infty, 0)$ y $(0, 3)$.



a) Prueba de la primera derivada

por la prueba de la primera derivada resulta evidente que $f(3) = -17$ es un mínimo relativo.

Las intercepciones sobre el eje x se obtienen haciendo y=0.
En este caso, como la resolución es compleja se hace con un programa online:

https://www.mathway.com/es/popular-problems/Calculus/532998

Escriba el polinomio como una ecuación.

$$y = x^4 - 4x^3 + 10$$

Para hallar la intersección en X, sustituye 0 en y y resuelve para x.

$$(0) = x^4 - 4x^3 + 10$$

Las raíces de esta ecuación no se pueden encontrar algebraicamente, así que las raíces se han determinado numéricamente.

$$x = 1{,}611793; 3{,}820704$$

El procedimiento completo es es el siguiente:

- Hallar los intervalos donde la función original $f(x) = y$ es creciente y decreciente.
- Para esto se hace la primera Derivada.
- Se Factoriza.
- Se hallan los puntos críticos igualando a cero la primera derivada.
- Determinar signos por el método del cementerio.
- Hallar el valor de la función en los puntos críticos.
- Con base en lo anterior hallar máximos y mínimos
- Hallar la segunda derivada para los puntos de inflexión y confirmar la concavidad hacia arriba o hacia abajo.
- Se determinan los puntos de intersección sobre el eje x haciendo y=0 y sobre el eje y haciendo x=0.
- Se procede a determinar la gráfica aproximada.

EJEMPLO 3 función racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1}.$$

Hallar:

intersección y
intersecciones x.
Simetría:
Asíntotas verticales.
Asíntotas horizontales:
Valores críticos
Rangos de crecimiento y decrecimiento.
Concavidades
Puntos de máximos y mínimos.
Forma aproximada de la gráfica.

EJEMPLO 3 función racional

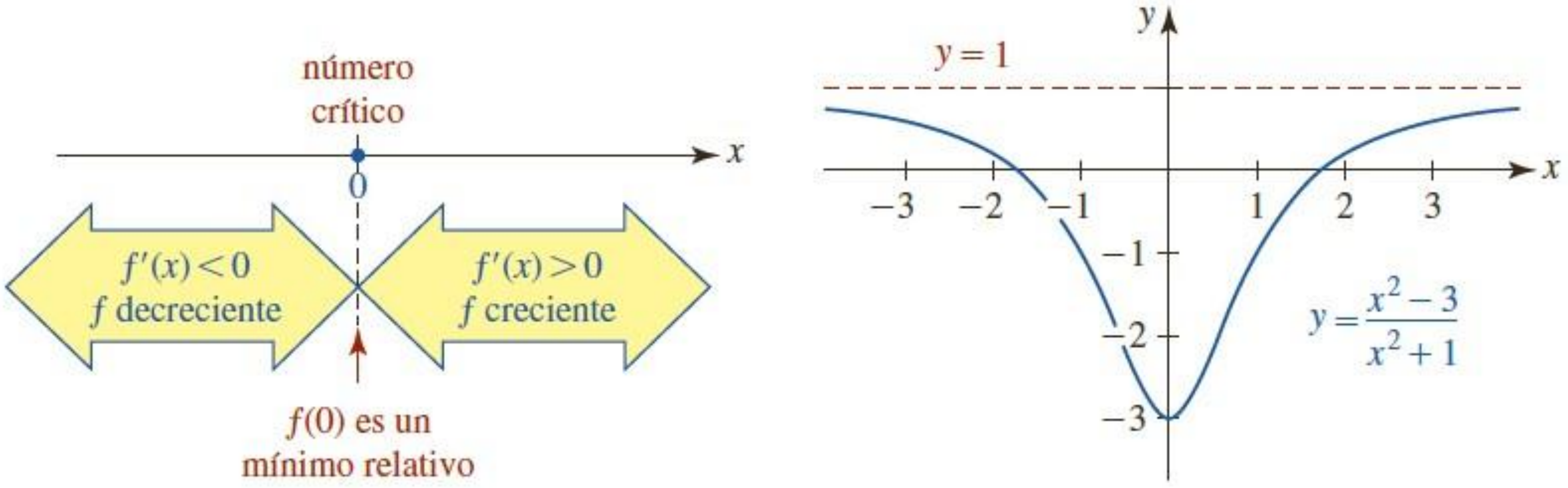
$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1}.$$

Solución La lista que se muestra a continuación resume algunos hechos que es posible descubrir sobre la gráfica de esta función racional f .

intersección y: $f(0) = -3$; en consecuencia, la intersección y es $(0, -3)$.
intersecciones x: $f(x) = 0$ cuando $x^2 - 3 = 0$. Por tanto, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$. Las intersecciones x son $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$.
Simetría: Con respecto al eje y, puesto que $f(-x) = f(x)$.
Asíntotas verticales: Ninguna, puesto que $\boxed{x^2 + 1 \neq 0}$ para todos los números reales.
Asíntotas horizontales: Puesto que el límite en el infinito es la forma indeterminada ∞/∞, podemos aplicar la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} \stackrel{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2} = 1,$$

y así la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.



a) Prueba de la primera derivada

b) $y = 1$ es una asíntota horizontal

FIGURA 4.6.5 Gráfica de la función en el ejemplo 3

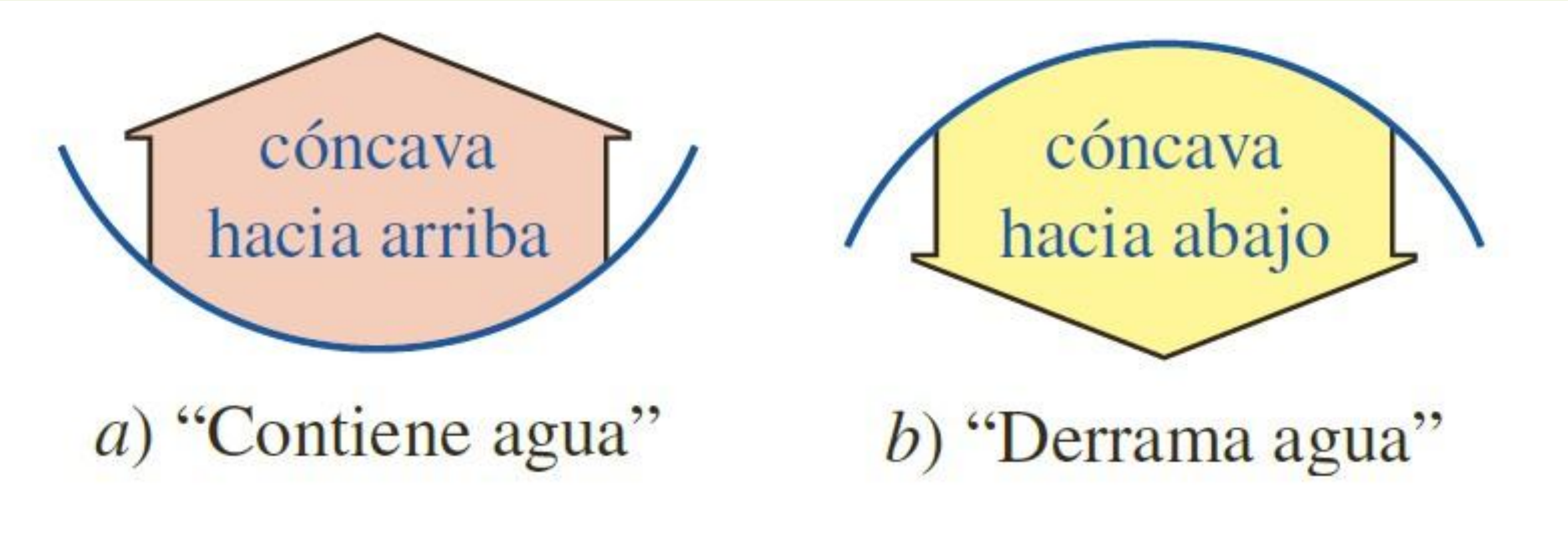
Derivada: Con la regla del cociente obtenemos $f'(x) = \dfrac{8x}{(x^2+1)^2}$.

Números críticos: $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$. En consecuencia, 0 es el único número crítico.

Prueba de la primera derivada: Vea la **FIGURA 4.6.5*a***); $f(0) = -3$ es un mínimo relativo.

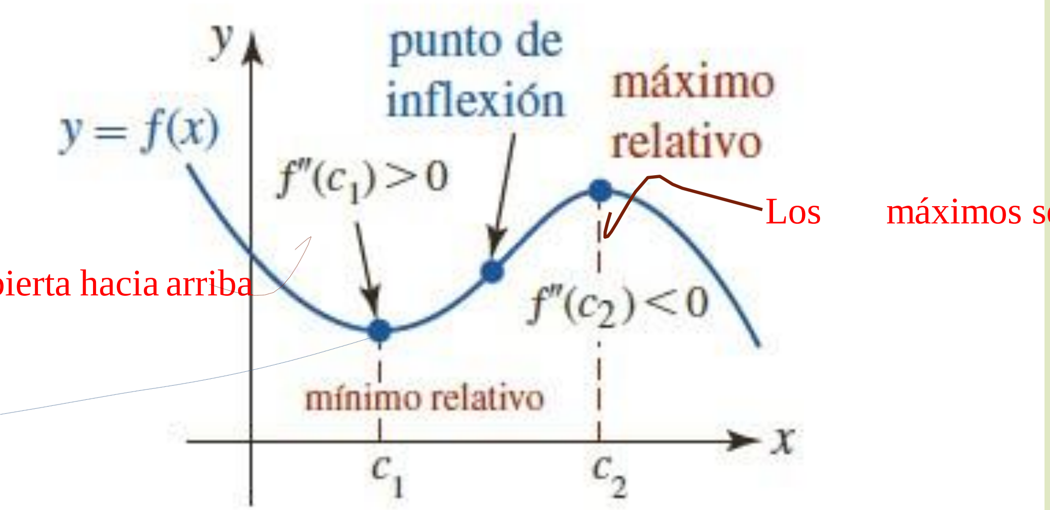
Grafique: Vea la figura 4.6.5*b*).

Gráficas y la segunda derivada



Concavidad abierta hacia arriba. Concavidad abierta hacia abajo

Concavidad y segunda derivada.



Los máximos se dan con la concavidad abierta hacia abajo.

Los mínimos se dan en concavidad abierta hacia arriba

FIGURA 4.7.4 Prueba de la segunda derivada

Teorema 4.7.1 Prueba para concavidad

Sea f una función para la cual f'' existe sobre (a, b).

Concavidad abierta hacia arriba.

i) Si $f''(x) > 0$ para toda x en (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre (a, b).

ii) Si $f''(x) < 0$ para toda x en (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre (a, b).

Concavidad abierta hacia abajo.

Máximos y mínimos

Si $f'(a)=0$ y $f''(a)<0 \Rightarrow f(x)$ tiene un máximo en $x=a$.

Si $f'(a)=0$ y $f''(a)>0 \Rightarrow f(x)$ tiene un mínimo en $x=a$.

La segunda derivada es cero en el punto de inflexión y allí existe un cambio de concavidad.

EJEMPLO 1 Prueba para concavidad

Determine los intervalos sobre los cuales la gráfica de $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2$ es cóncava hacia arriba y los intervalos sobre los cuales la gráfica es cóncava hacia abajo.

Solución A partir de $f'(x) = 3x^2 + 9x$ obtenemos

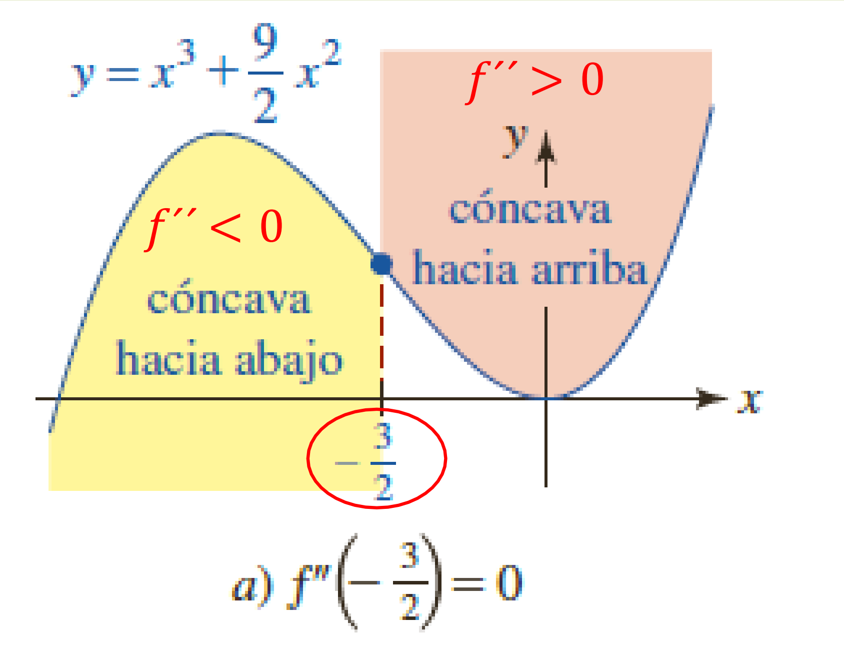
$$f''(x) = 6x + 9 = 6\left(x + \tfrac{3}{2}\right).$$

$$f'' = 0 = 6\left(x + \frac{3}{2}\right) \longrightarrow x = -\frac{3}{2}$$ Punto de inflexión

$\left(x + \frac{3}{2}\right)$ $\qquad -\qquad -\frac{3}{2}\qquad +$

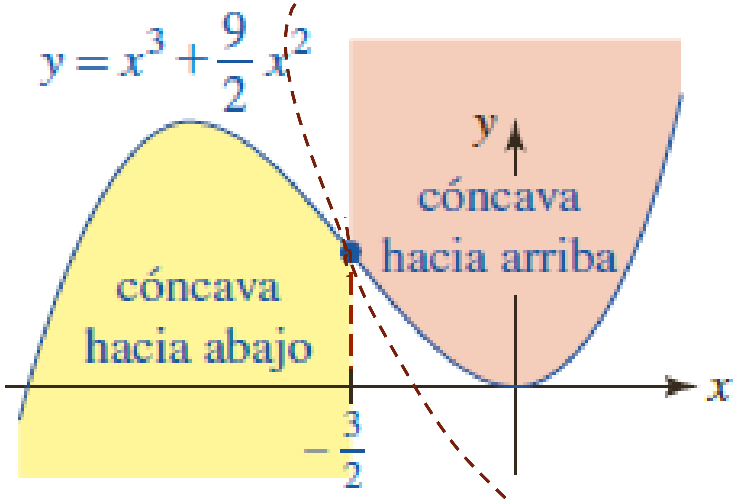
$$\text{Si } x > -\frac{3}{2} \qquad f'' \ es +$$

$$\text{si } x < -\frac{3}{2} \qquad f'' \ es -$$



Por el teorema 4.7.1 concluimos que la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba sobre el intervalo $\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$. ■

Punto de inflexión



a) $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$

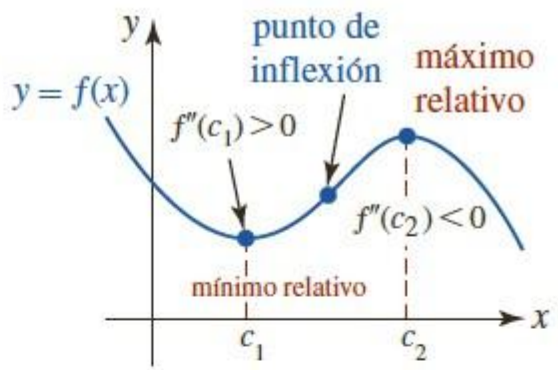


FIGURA 4.7.4 Prueba de la segunda derivada

Punto de inflexión La gráfica de la función en el ejemplo 1 cambia de concavidad en el punto que corresponde a $x = -\frac{3}{2}$. Cuando x crece a través de $-\frac{3}{2}$, la gráfica de f cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en el punto $\left(-\frac{3}{2}, \frac{27}{4}\right)$. Un punto sobre la gráfica de una función donde la concavidad cambia de arriba abajo o viceversa tiene un nombre especial.

La segunda derivada es cero en el punto de inflexión y allí existe un cambio de concavidad.

Teorema 4.7.2 Punto de inflexión

Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión para la gráfica de una función f, entonces $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe.