❖MIS VALORES

Entrega

Transparencia

Simplicidad

y Persistencia

❖MI VISIÓN: Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖MI MISIÓN: Entrega a la Voluntad Suprema.

Servir a las personas.

Derivación implícita

La mayor parte de las funciones que hemos visto hasta ahora pueden describirse expresando una variable explícitamente en términos de otra variable; por ejemplo,

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \qquad \text{o bien} \qquad y = x \operatorname{sen} x$$

o, en general, $y = f(x)$.

Funciones implícitas y explícitas Se dice que una función donde la variable dependiente se expresa sólo en términos de la variable independiente x, a saber, $y = f(x)$, es una **función explícita**. Por ejemplo, $y = \frac{1}{2}x^3 - 1$ es una función explícita.

Para hallar la derivada en forma implícita no **es necesario despejar y**. Basta **derivar miembro a miembro**, utilizando las reglas vistas hasta ahora y teniendo presente que:

1. Cuando se derivan términos que solo contienen a x, la derivación será la habitual. $\frac{dx}{dx} = 1.$
2. $\frac{dy}{dx} \neq 1$ $y\ se\ deja\ indicado\ de\ esa\ manera.$
3. $\frac{dy^n}{dx} = \mathrm{n}y^{n-1} \cdot \frac{dy}{dx}$

Directrices para diferenciación implícita

i) Al diferenciar con respecto a x ambos miembros de la ecuación, use las reglas de diferenciación y considere a y como una función diferenciable de x. Para potencias del símbolo y, use (6).

ii) Agrupe todos los términos donde aparece dy/dx en el miembro izquierdo de la ecuación diferenciada. Mueva todos los otros términos al miembro derecho de la ecuación.

iii) Factorice dy/dx en todos los términos donde aparezca este término. Luego, despeje dy/dx.

Por ejemplo, derivemos $x^2 + y^2 = 1$. En este caso, tratamos la variable y como una función de x.

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Observa que la derivada de y^2 es $2y \cdot \frac{dy}{dx}$ y no simplemente $2y$. Esto es porque tratamos y como una función de x.

$$x^3y - 2x^2 + y^4 = 8$$

Encuentra $\frac{dy}{dx}$.

Escoge 1 respuesta:

- $\frac{4x - 3x^2y}{x^3 + 4y^3}$
- $-\frac{4x}{3x^2 + 4y^3}$
- $\frac{4x}{3x^2 + 4y^3}$
- $\frac{x^3 + 4y^3}{4x - 3x^2y}$

https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus/advanced-diff-dc/implicit-differentiation-intro-dc/e/implicit-differentiation

$$4x - x^2y + y^3 = 10$$

Encuentra el valor de $\frac{dy}{dx}$ en el punto $(1, 2)$.

Escoge 1 respuesta:

- -4
- -1
- $\frac{2}{3}$
- 0

$$2y^2 - x^2 + x^3y = 2$$

Encuentra $\dfrac{dy}{dx}$.

Escoge 1 respuesta:

- $\dfrac{2x}{4y + 3x^2}$
- $\dfrac{2x - 4y}{3x^2}$
- $\dfrac{2x - 3x^2y}{4y + x^3}$
- $\dfrac{4y + x^3}{2x - 3x^2y}$

donde n es cualquier número real. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x \qquad \text{mientras} \qquad \frac{d}{dx}y^2 = 2y\frac{dy}{dx}.$$

En forma semejante, si y es una función de x, entonces por la regla del producto

$$\frac{d}{dx}xy = x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y,$$

y por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} 5y = \cos 5y \cdot \frac{d\,5y}{dx} = 5\cos 5y\frac{dy}{dx}.$$

EJEMPLO 1 Uso de la diferenciación implícita

Encuentre dy/dx si $x^2 + y^2 = 4$.

Solución Se diferencian ambos miembros de la ecuación y luego se usa (6):

use la regla de potencias (6) aquí

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}4$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Al despejar la derivada obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \qquad (7)$$

■

EJEMPLO 5 Reglas de la cadena y del producto

Encuentre dy/dx si $\operatorname{sen} y = y \cos 2x$.

Solución Por la regla de la cadena y la regla del producto obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \operatorname{sen} y &= \frac{d}{dx} y \cos 2x \\
\cos y \cdot \frac{dy}{dx} &= y(-\operatorname{sen} 2x \cdot 2) + \cos 2x \cdot \frac{dy}{dx} \\
(\cos y - \cos 2x) \frac{dy}{dx} &= -2y \operatorname{sen} 2x \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{2y \operatorname{sen} 2x}{\cos y - \cos 2x}.
\end{aligned}$$

■

Analizar ejemplos del libro de Zill

EJEMPLO 2 La pendiente de una recta tangente

Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$ en los puntos correspondientes a $x = 1$.

EJEMPLO 3 Uso de diferenciación implícita

Encuentre dy/dx si $x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + 1$.

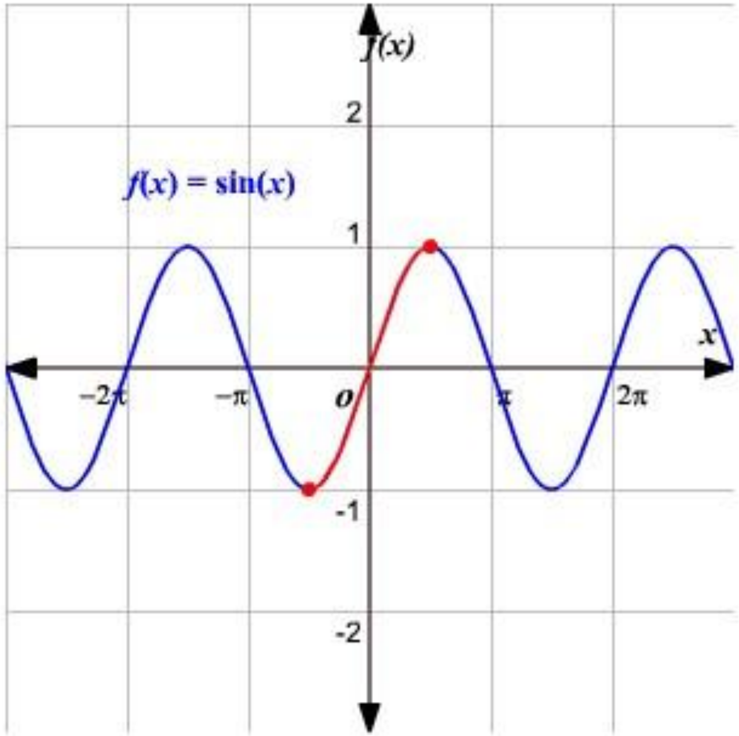
Las Funciones trigonométricas no son 1-1

Las funciones trigonométricas son todas funciones periódicas. Así las gráficas de ninguna de ellas pasa la prueba de la línea horizontal y tampoco son 1-a-1 .

Esto significa que ninguna de ellas tiene una inversa a menos que el dominio de cada una esté restringido a hacer de ella una 1-a-1.

https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/spanish/topics/inverse-trigonometric-functions

Ya que las gráficas son periódicas, si escogemos un dominio adecuado podemos usar todos los valores del rango .

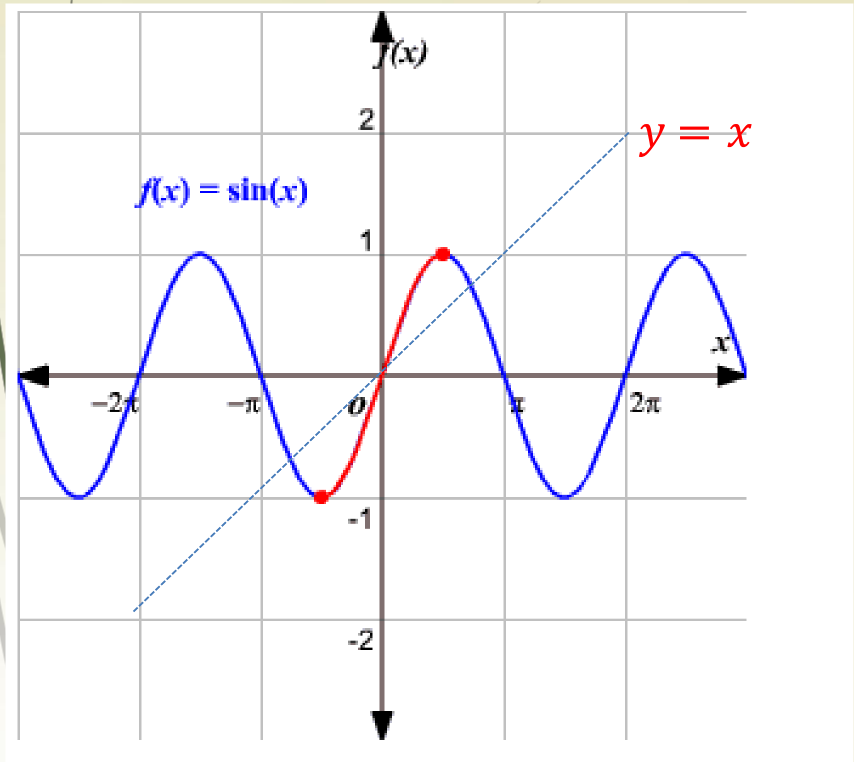


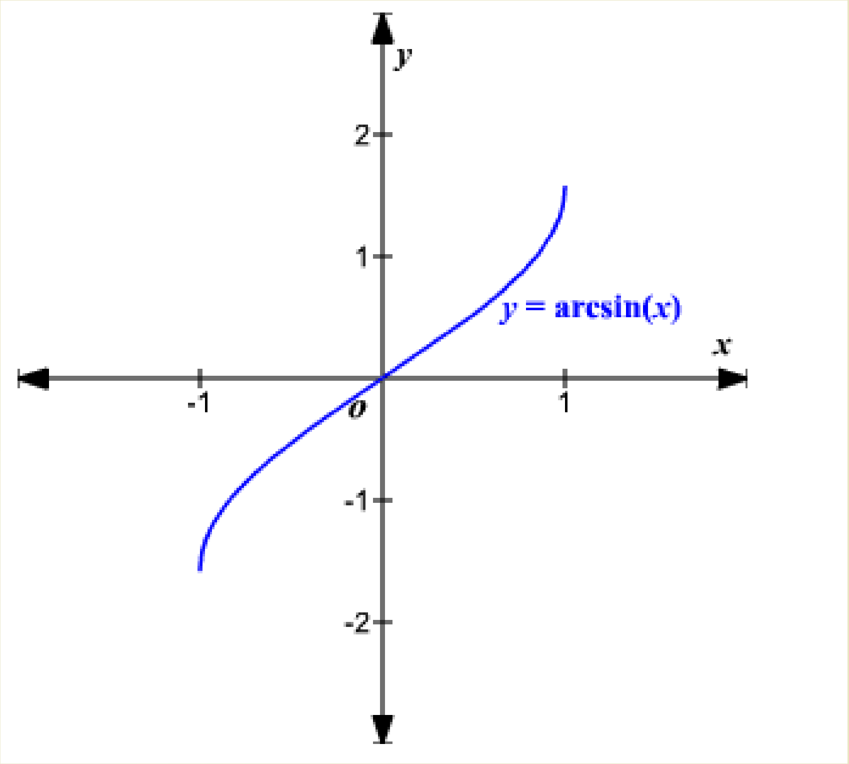
Si restringimos el dominio de $f(x) = \sin x$ a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ hemos hecho la función 1-a-1. El rango es [−1, 1].

Funciones trigonométricas inversas

Denotamos la función inversa de $sen\ x$ como $y = sin^{-1} x$ o $arcsen\ x$.
Se lee y es la inversa del seno de x y significa que y es el ángulo que le corresponde al valor de seno x. Pero tenga cuidado con la notación usada. El superíndice " $^{-1}$ " NO es un exponente. Para evitar esta notación, algunos libros usan $y = \arcsin x$ como notación.

Para graficar la inversa de la función seno, recuerde que la gráfica es una reflexión sobre la recta $y = x$ de la función seno.





Teorema 3.7.4 Derivada de una función inversa

Suponga que f es diferenciable sobre un intervalo I y que $f'(x)$ nunca es cero sobre I. Si f tiene una inversa f^{-1} sobre I, entonces f^{-1} es diferenciable en un número x y

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{3}$$

Lo que equivale a decir que para hallar la derivada de la función inversa:

1. Se halla la derivada de la función original (a la cual se le determina la inversa)
2. Se evalúa esa derivada con la función inversa.

O lo que es lo mismo: se hace la función compuesta de $f' \circ f^{-1}(x)$

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{d}\,sen^{-1}x$$

Seno inverso: $y = \text{sen}^{-1} x$ si y sólo si $x = \text{sen}\, y$, donde $-1 \le x \le 1$ y $-\pi/2 \le y \le \pi/2$. En consecuencia, la diferenciación implícita

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\text{sen}\, y \qquad \text{proporciona} \qquad 1 = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}$$

y así

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}. \tag{6}$$

Para la restricción dada sobre la variable y, $\cos y \ge 0$ y así $\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Al sustituir esta cantidad en (6), hemos demostrado que

$$\frac{d}{dx}\text{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{7}$$

$\cos 0 = 0$, $sen^2x + cos^2 = 1$ $cos^2 =1-sen^2x$ $cosy = \sqrt{1 - sen^2x}$ $x = seny$

$$\frac{d}{d}\,sen^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

x

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx},$$

EJEMPLO 4 Derivada del seno inverso

Diferencie $y = \text{sen}^{-1} 5x$.

Solución Con $u = 5x$, por la primera fórmula en (14) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}5x = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}.$$

Ejemplo 1: Derive $y = \frac{1}{sen^{-1}x}$

Solución: $y = \frac{1}{sen^{-1}x} = \left(sen^{-1}x\right)^{-1}$ de ahí que: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(sen^{-1}x\right)^{-1} = -\left(sen^{-1}x\right)^{-2}\frac{d}{dx}\left(sen^{-1}x\right) \Rightarrow -\frac{1}{\left(sen^{-1}x\right)^{2}\sqrt{1-x^{2}}}$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx},$$

Tangente inversa:

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx},$$

EJEMPLO 5 Derivada de la tangente inversa

Diferencie $y = \tan^{-1}\sqrt{2x+1}$.

Solución Con $u = \sqrt{2x+1}$, por la primera fórmula en (15) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}(2x+1)^{1/2}\\ &= \frac{1}{1+(2x+1)}\cdot\frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2}\cdot 2\\ &= \frac{1}{(2x+2)\sqrt{2x+1}}.\end{aligned}$$

Secante inversa:

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

EJEMPLO 6 Derivada de la secante inversa

Diferencie $y = \sec^{-1} x^2$.

Solución Para $x^2 > 1 > 0$, por la primera fórmula en (16) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{|x^2|\sqrt{(x^2)^2 - 1}} \cdot \frac{d}{dx}x^2$$
$$= \frac{2x}{x^2\sqrt{x^4 - 1}} = \frac{2}{x\sqrt{x^4 - 1}}. \qquad (17)$$

Con ayuda de un dispositivo para graficar obtenemos la gráfica de $y = \sec^{-1} x^2$ que se muestra en la FIGURA 3.7.3. Observe que (17) proporciona una pendiente positiva para $x > 1$ y una negativa para $x < -1$. ■

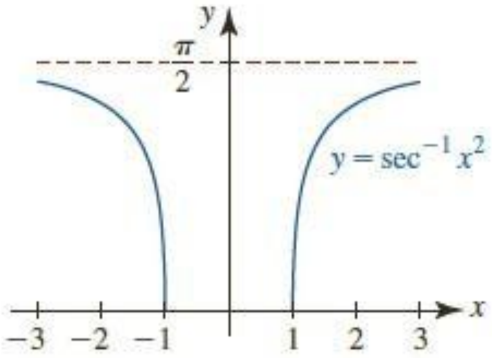


FIGURA 3.7.3 Gráfica de la función en el ejemplo 6

Teorema 3.7.5 Funciones trigonométricas inversas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \tag{14}$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cot^{-1} u = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx}, \tag{15}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\csc^{-1} u = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}. \tag{16}$$

Algunas características de las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas inversas, así como de su escritura, son:

a) Todas son una fracción cuyo numerador es la derivada del argumento.

b) Las cofunciones son iguales, diferenciadas solamente de un signo negativo, es decir, la fórmula del *arco seno* es igual a la del *arco coseno*, solamente que esta última es negativa; la fórmula de la *arco tangente* es igual a la de la *arco cotangente*, siendo ésta última negativa. Y algo semejante sucede con la *arco secante* y la *arco cosecante*.

c) El símbolo de una función trigonométrica inversa, por ejemplo del *seno inverso*, debe ser *arc sen*, que se lee "arco seno" y significa "seno cuyo arco es", es decir, "seno cuyo ángulo es", ya que el arco en una circunferencia es igual al ángulo central que

EJEMPLO 7 Recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 \cos^{-1} x$ en $x = -\frac{1}{2}$.

Solución Por la regla del producto y la segunda fórmula en (14):

$$f'(x) = x^2\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + 2x\cos^{-1} x.$$

Puesto que $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi/3$, al evaluar las dos funciones f y f' en $x = -\frac{1}{2}$ obtenemos:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \qquad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\pi}{6}\right)$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3}. \qquad \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\pi}{6}\right) \text{ es } -\tfrac{1}{2\sqrt{3}} - \tfrac{2\pi}{3}$$

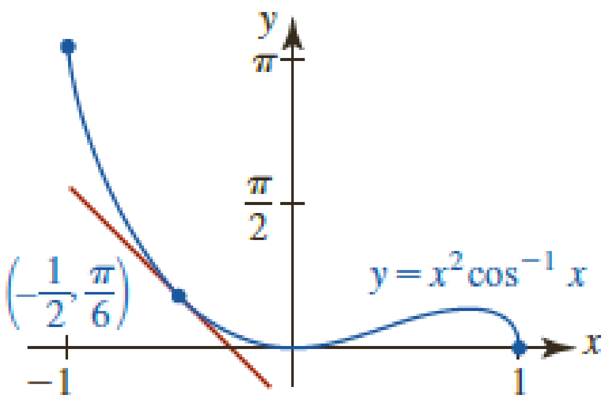


FIGURA 3.7.4 Recta tangente en el ejemplo 7

Por la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, la ecuación sin simplificar de la recta tangente es

$$y - \frac{\pi}{6} = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Puesto que el dominio de $\cos^{-1} x$ es el intervalo $[-1, 1]$, el dominio de f es $[-1, 1]$. El rango correspondiente es $[0, \pi]$. La FIGURA 3.7.4 se obtuvo con ayuda de un dispositivo para graficar. ■

■ **Derivadas de orden superior** Por medio de diferenciación implícita determinamos dy/dx. Al diferenciar dy/dx con respecto a x obtenemos la segunda derivada d^2y/dx^2. Si la primera derivada contiene a y, entonces d^2y/dx^2 de nuevo contiene el símbolo dy/dx; esa cantidad puede eliminarse al sustituir su valor conocido. El siguiente ejemplo ilustra el método.

EJEMPLO 4 Segunda derivada

Encuentre d^2y/dx^2 si $x^2 + y^2 = 4$.

EJEMPLO 5 Reglas de la cadena y del producto

Encuentre dy/dx si $\operatorname{sen} y = y \cos 2x$.

Solución Por la regla de la cadena y la regla del producto obtenemos

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} y = \frac{d}{dx} y \cos 2x$$

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = y(-\operatorname{sen} 2x \cdot 2) + \cos 2x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$(\cos y - \cos 2x)\frac{dy}{dx} = -2y \operatorname{sen} 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y \operatorname{sen} 2x}{\cos y - \cos 2x}. \quad \blacksquare$$

DERIVACIÓN DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

Teorema 3.8.1 Derivadas de funciones exponenciales

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}, \tag{14}$$

y

$$\frac{d}{dx} b^u = b^u (\ln b) \frac{du}{dx}. \tag{15}$$

Teorema 3.9.1 Derivadas de funciones logarítmicas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \tag{3}$$

y

$$\frac{d}{dx}\log_b u = \frac{1}{u(\ln b)}\frac{du}{dx}. \tag{4}$$

Derivación logarítmica

Básicamente se trata de sacar primero en una ecuación que no es logarítmica, el logaritmo a ambos lados, con lo cual la volvemos logarítmica y generalmente se simplifica.

A partir de allí, se obtiene la derivada implícita de una manera más fácil que si lo hiciéramos con la ecuación original.

Pasos en la derivación logarítmica

1. Tomar logaritmos naturales de ambos lados de una ecuación $y = f(x)$ y utilizar las leyes de los logaritmos para simplificar.
2. Derivar implícitamente respecto a x.
3. Resolver la ecuación resultante para y'.

Derivación logarítmica

Con frecuencia, el cálculo de derivadas de funciones complicadas que comprenden productos, cocientes o potencias puede simplificarse tomando logaritmos. El método que se aplica en el ejemplo siguiente se llama **derivación logarítmica**.

Recordando que se pasa fácilmente de función exponencial a logarítmica y viceversa:

$$\log_b y = x$$

$$b^x = y$$

EJEMPLO 9 Diferenciación logarítmica

Diferencie $y = x^{\sqrt{x}}, x > 0$.

EJEMPLO 9 Diferenciación logarítmica

Diferencie $y = x^{\sqrt{x}}, x > 0$.

Solución Al tomar el logaritmo natural de ambos miembros de la ecuación dada y simplificar obtenemos

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \ln x. \quad \leftarrow \text{propiedad } iii) \text{ de las leyes de los logaritmos. Sección 1.6}$$

Luego se diferencia implícitamente en ambos lados

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^{-1/2} \cdot \ln x \quad \leftarrow \text{regla del producto}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right] \quad \leftarrow \text{ahora se sustituye } y \text{ por } x^{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2}x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(2 + \ln x). \quad \leftarrow \text{denominador común y leyes de los exponentes}$$

EJEMPLO 10 Diferenciación logarítmica

Encuentre la derivada de $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^4 + 6x^2}(8x + 3)^5}{(2x^2 + 7)^{2/3}}$.

$$\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$$

EJEMPLO 10 Diferenciación logarítmica

Encuentre la derivada de $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^4 + 6x^2}(8x + 3)^5}{(2x^2 + 7)^{2/3}}$.

$$\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$$

Solución Observe que la función dada no contiene logaritmos. Entonces podemos encontrar dy/dx usando una aplicación ordinaria de las reglas del cociente, del producto y de potencias. Este procedimiento, que es tedioso, puede evitarse al tomar primero el logaritmo de ambos miembros de la ecuación dada, simplificar como se hizo en el ejemplo con las leyes de los logaritmos y *luego* diferenciar implícitamente. Se toma el logaritmo de ambos miembros de la ecuación dada y se simplifica el miembro derecho:

$$\ln y = \ln \frac{\sqrt[3]{x^4 + 6x^2}(8x+3)^5}{(2x^2+7)^{2/3}}$$

$$= \ln \sqrt[3]{x^4 + 6x^2} + \ln(8x+3)^5 - \ln(2x^2+7)^{2/3}$$

$$= \frac{1}{3}\ln(x^4 + 6x^2) + 5\ln(8x+3) - \frac{2}{3}\ln(2x^2+7).$$

Al diferenciar la última línea con respecto a x obtenemos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^4+6x^2}\cdot(4x^3+12x) + 5\cdot\frac{1}{8x+3}\cdot 8 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2x^2+7}\cdot 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{4x^3+12x}{3(x^4+6x^2)} + \frac{40}{8x+3} - \frac{8x}{3(2x^2+7)}\right] \leftarrow \text{ambos lados se multiplican por } y$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^4+6x^2}(8x+3)^5}{(2x^2+7)^{2/3}}\left[\frac{4x^3+12x}{3(x^4+6x^2)} + \frac{40}{8x+3} - \frac{8x}{3(2x^2+7)}\right]. \leftarrow \text{y se sustituye por la expresión original}$$

■

EJEMPLO 7 Derive $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

SOLUCIÓN Tome logaritmos de ambos miembros de la ecuación y aplique las leyes de los logaritmos, para simplificar:

$$\ln y = \tfrac{3}{4}\ln x + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$$

Al derivar implícitamente respecto a x, resulta que

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 5\cdot\frac{3}{3x+2}$$

Al resolver para dy/dx, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Puesto que tenemos una expresión explícita para y, podemos sustituir y escribir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$