La recta tangente y la derivada

Memorizar términos matemáticos y no tener la mínima idea de lo que significan, es equivalente a no saberlos..”

“Las matemáticas no se memorizan… se deben razonar!!”

2

❖ **MIS VALORES**

Entrega

Transparencia

Simplicidad

y Persistencia

❖ **MI VISIÓN:** Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖ **MI MISIÓN:** Entrega a la Voluntad Suprema.

Servir a las personas.

LA RECTA TANGENTE

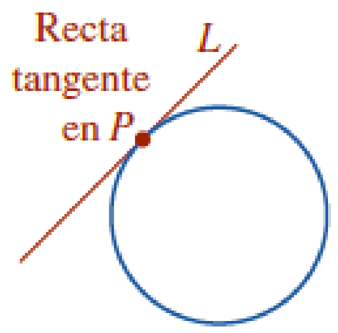
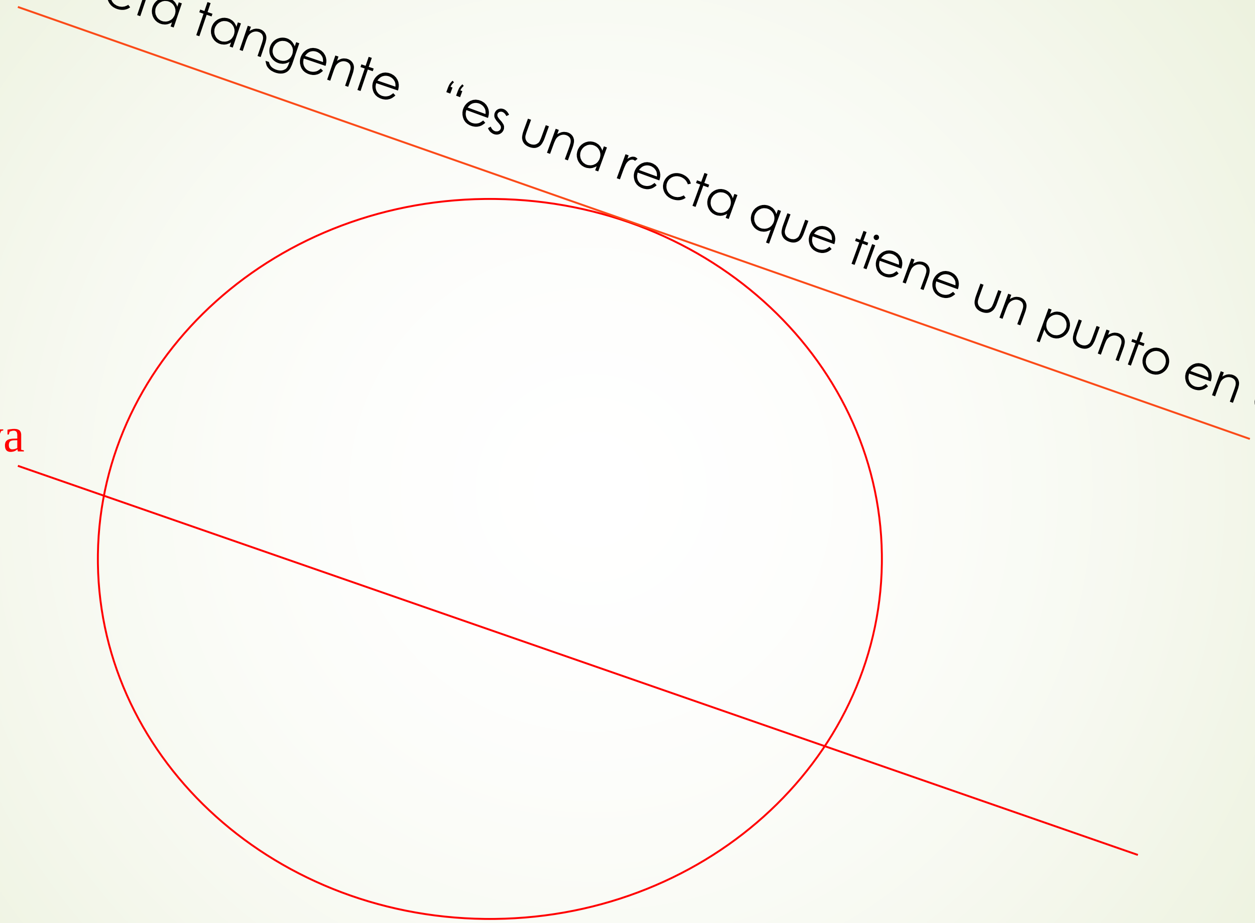


FIGURA 2.7.1 La recta tangente L toca un círculo en el punto P

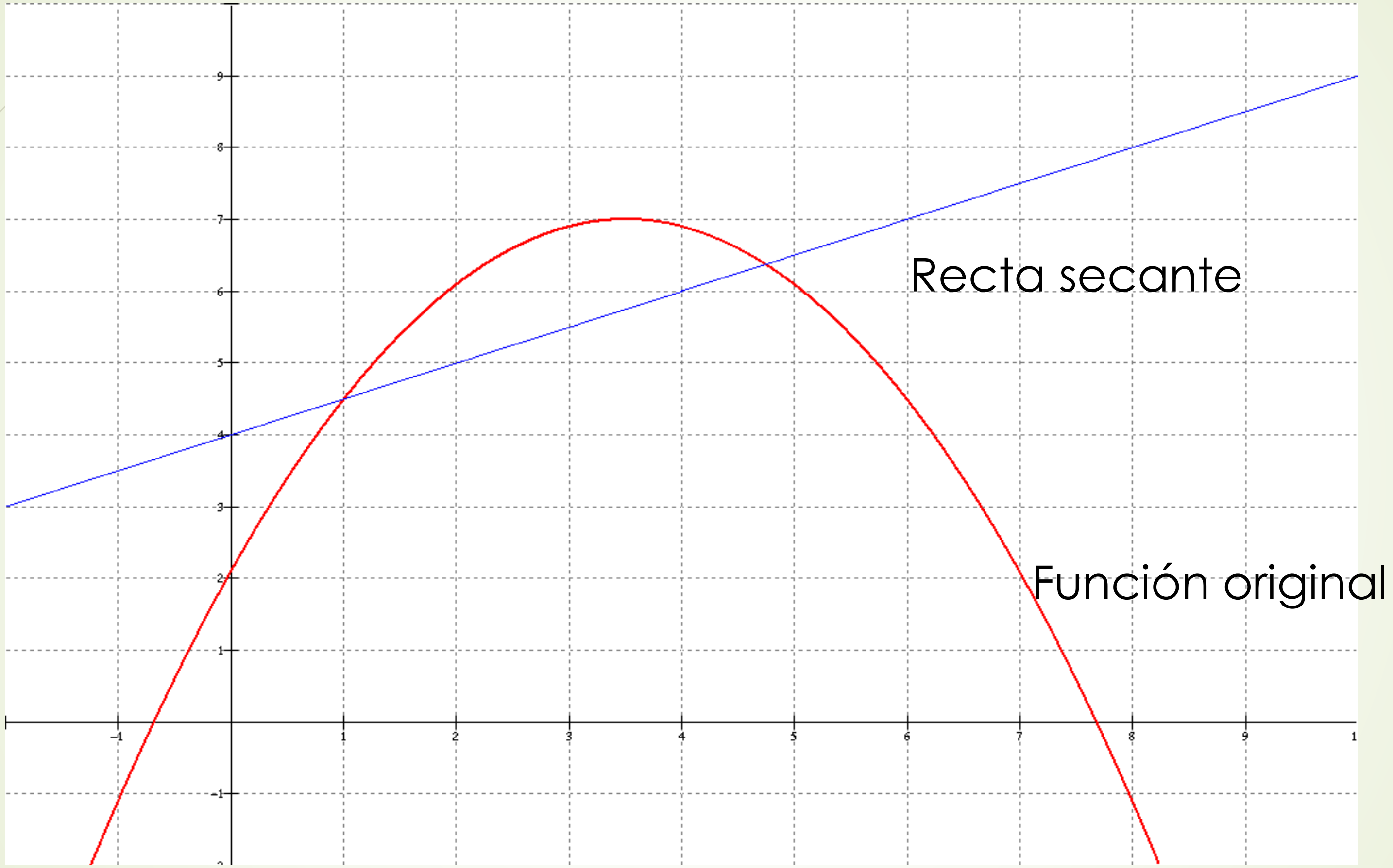
Quizá recuerde del estudio de geometría plana que una tangente a un círculo es una recta L que corta, o toca, al círculo exactamente en un punto P.

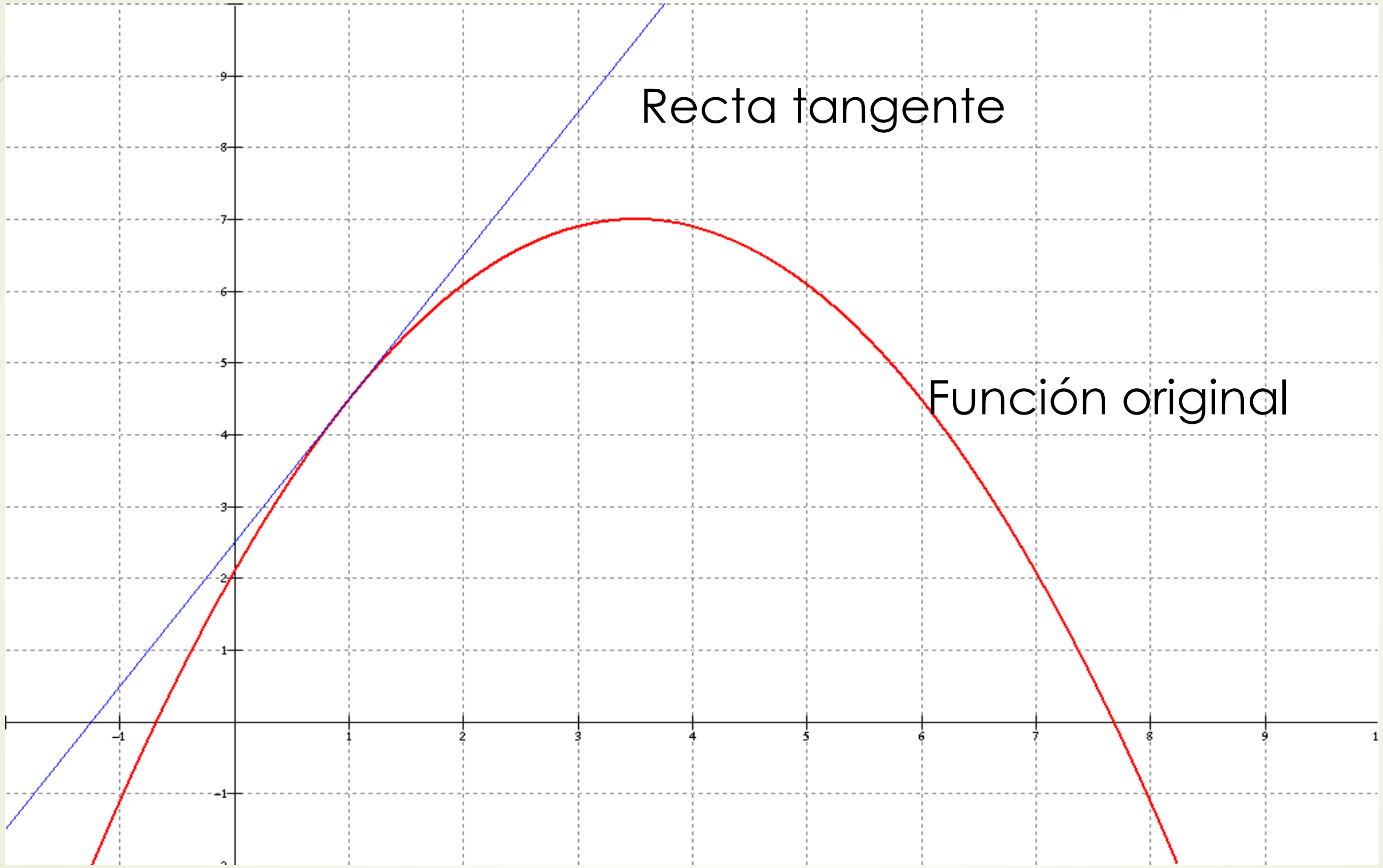
Recta tangente “es una recta que tiene un punto en común con un curva



Recta secante

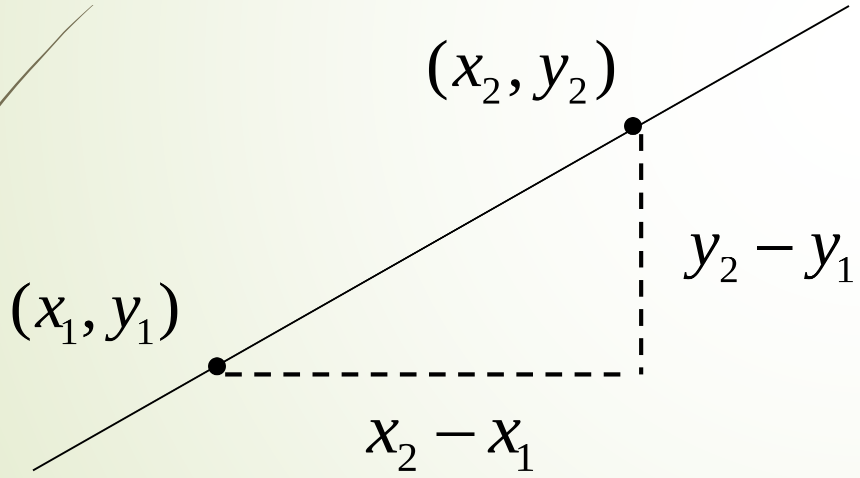
“es una recta que intersecta a una curva en dos puntos”


Recta secante
Función original



Recta tangente
Función original

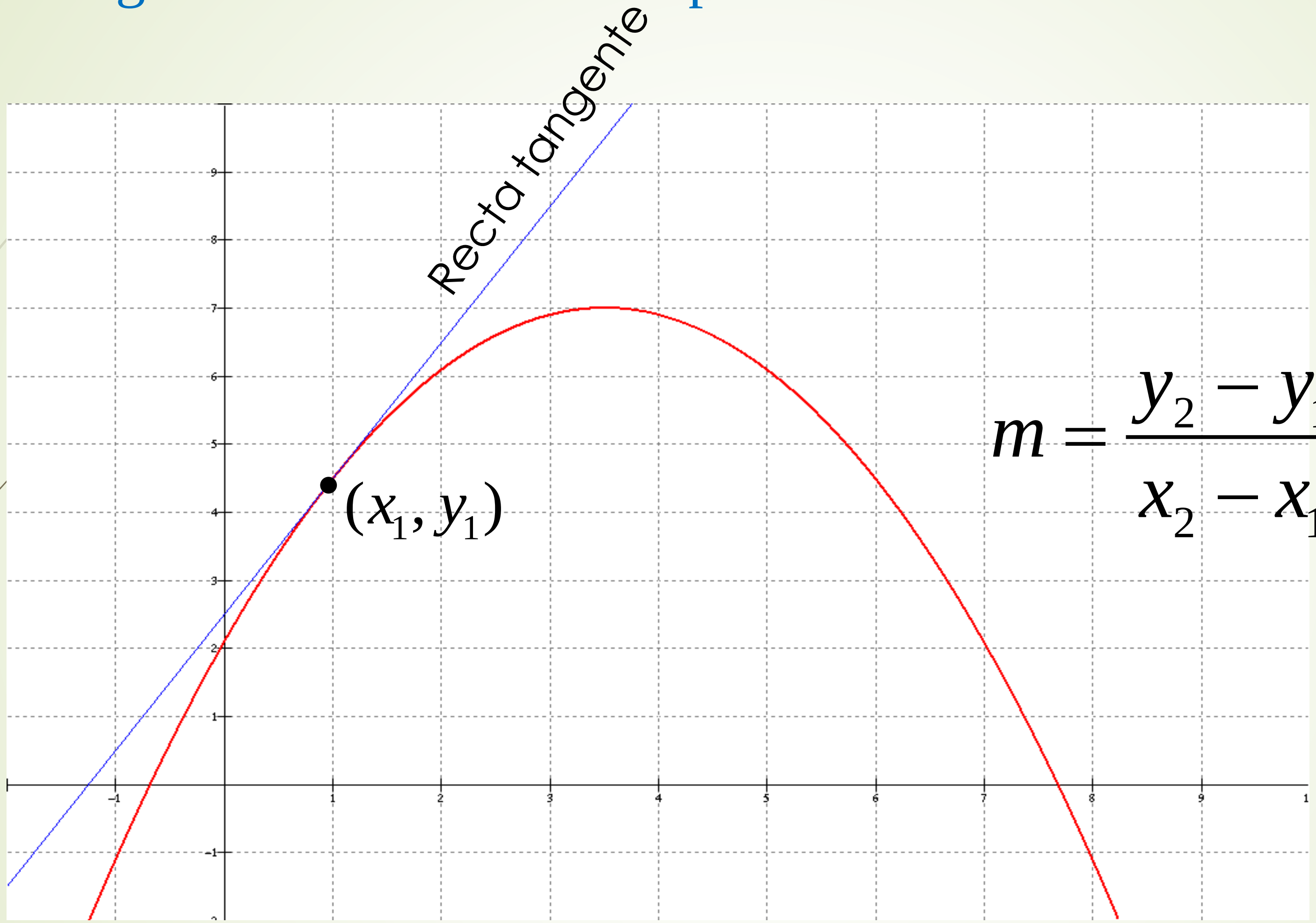
En términos muy simples la pendiente de una recta es
un valor numérico que representa la inclinación de dicha recta



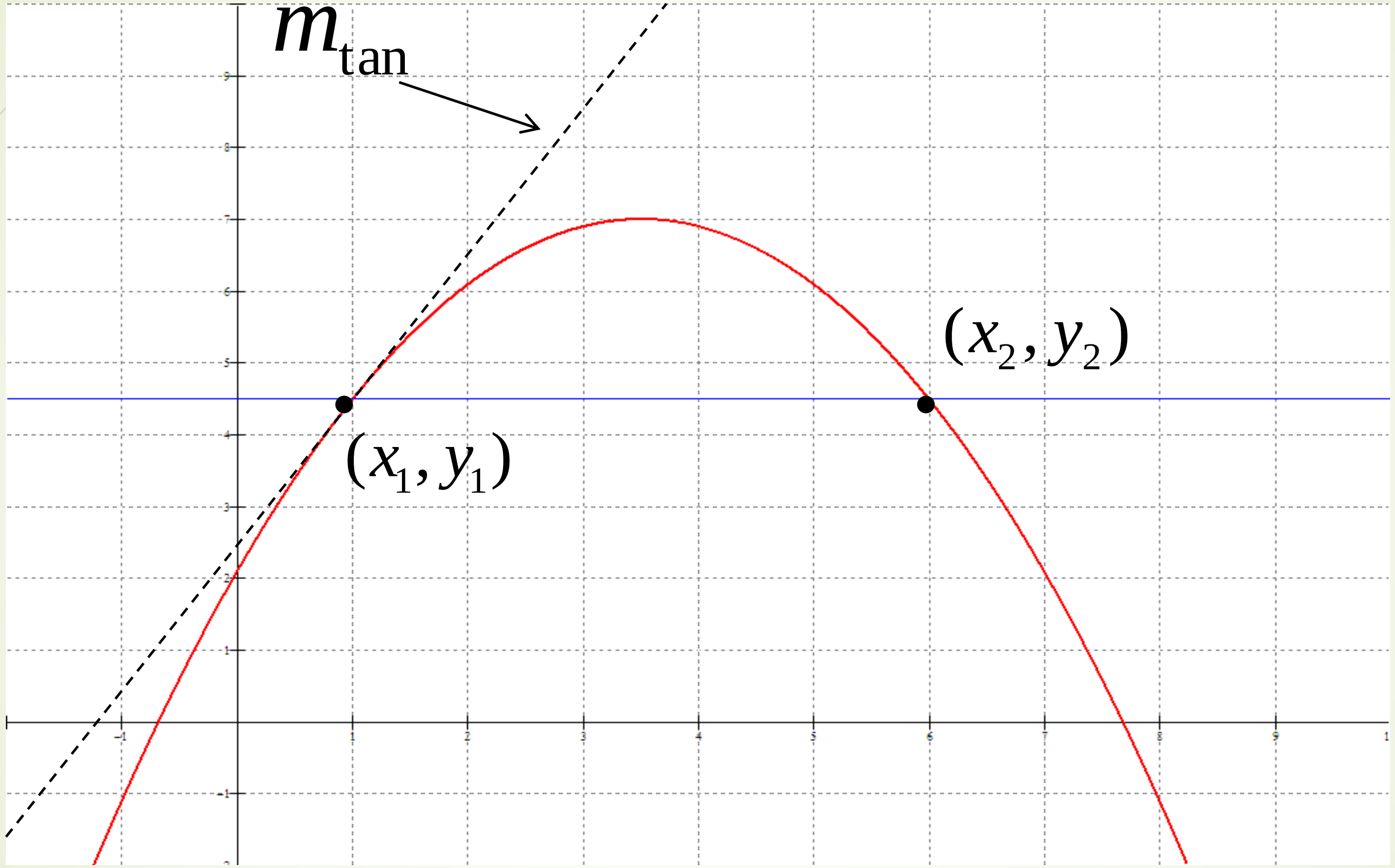
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

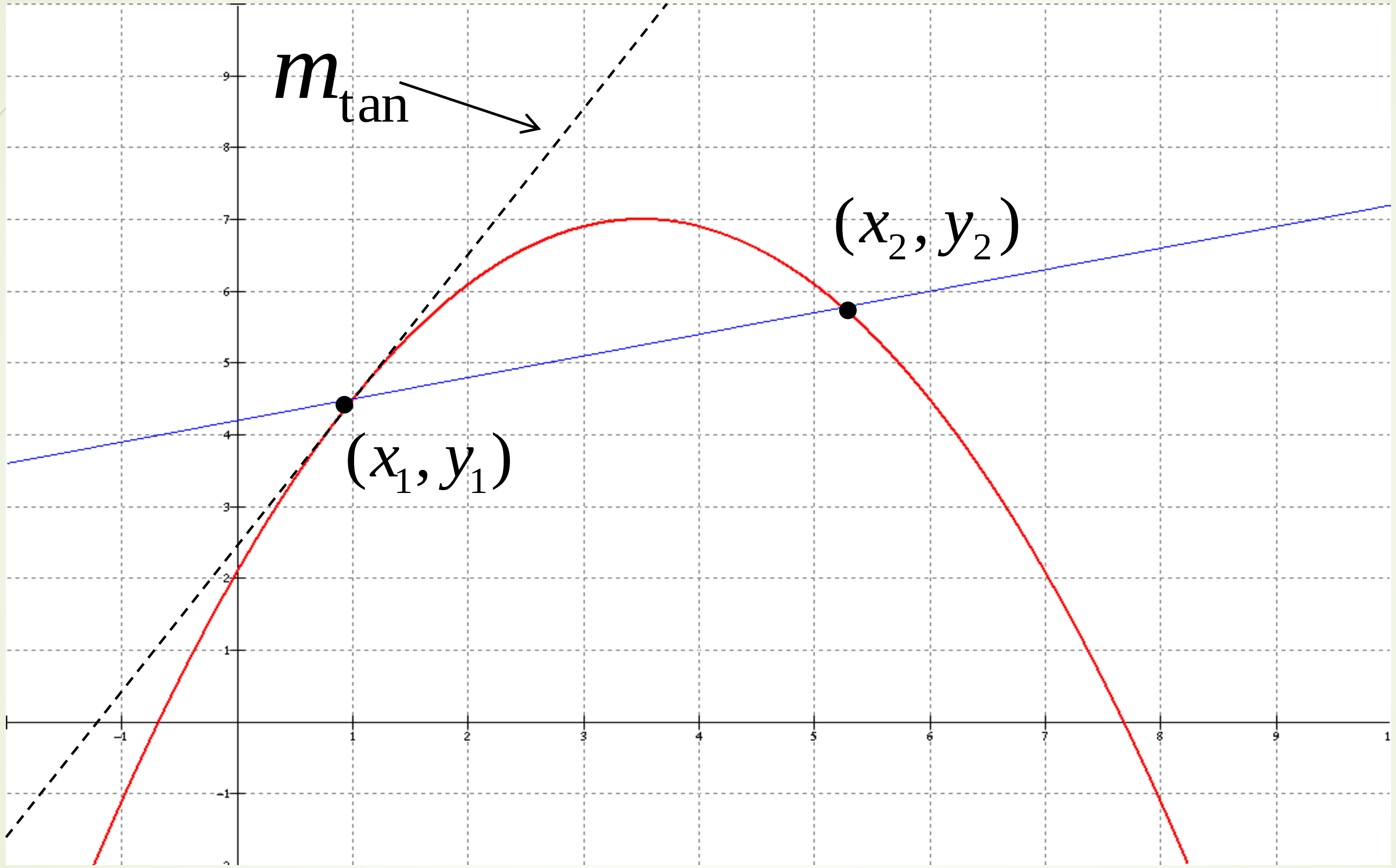
Muy sencillo de obtener si
tienes dos puntos sobre una recta!

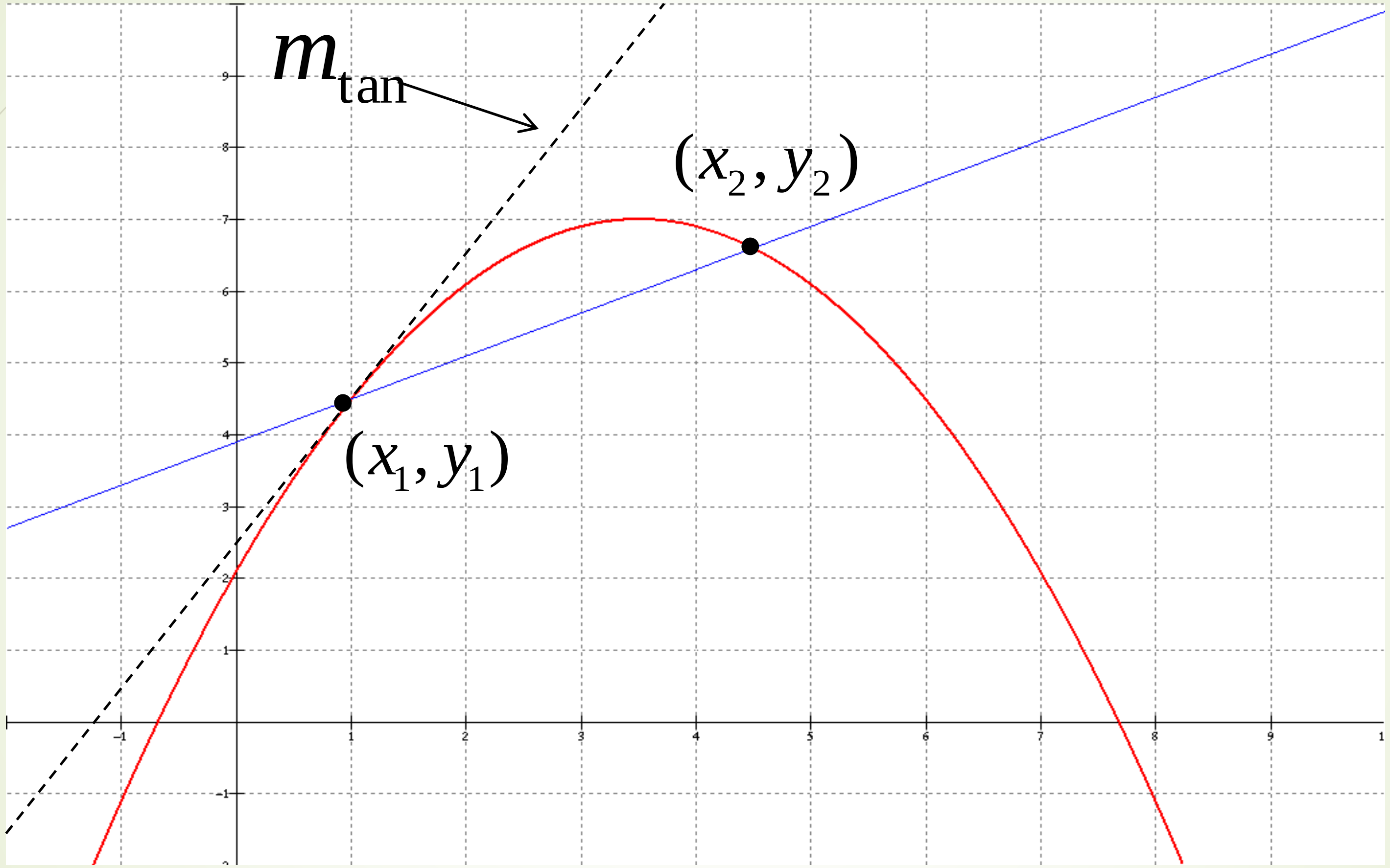
Pero……….. y como obtener análogamente la pendiente de una recta tangente si solo conoce un punto?

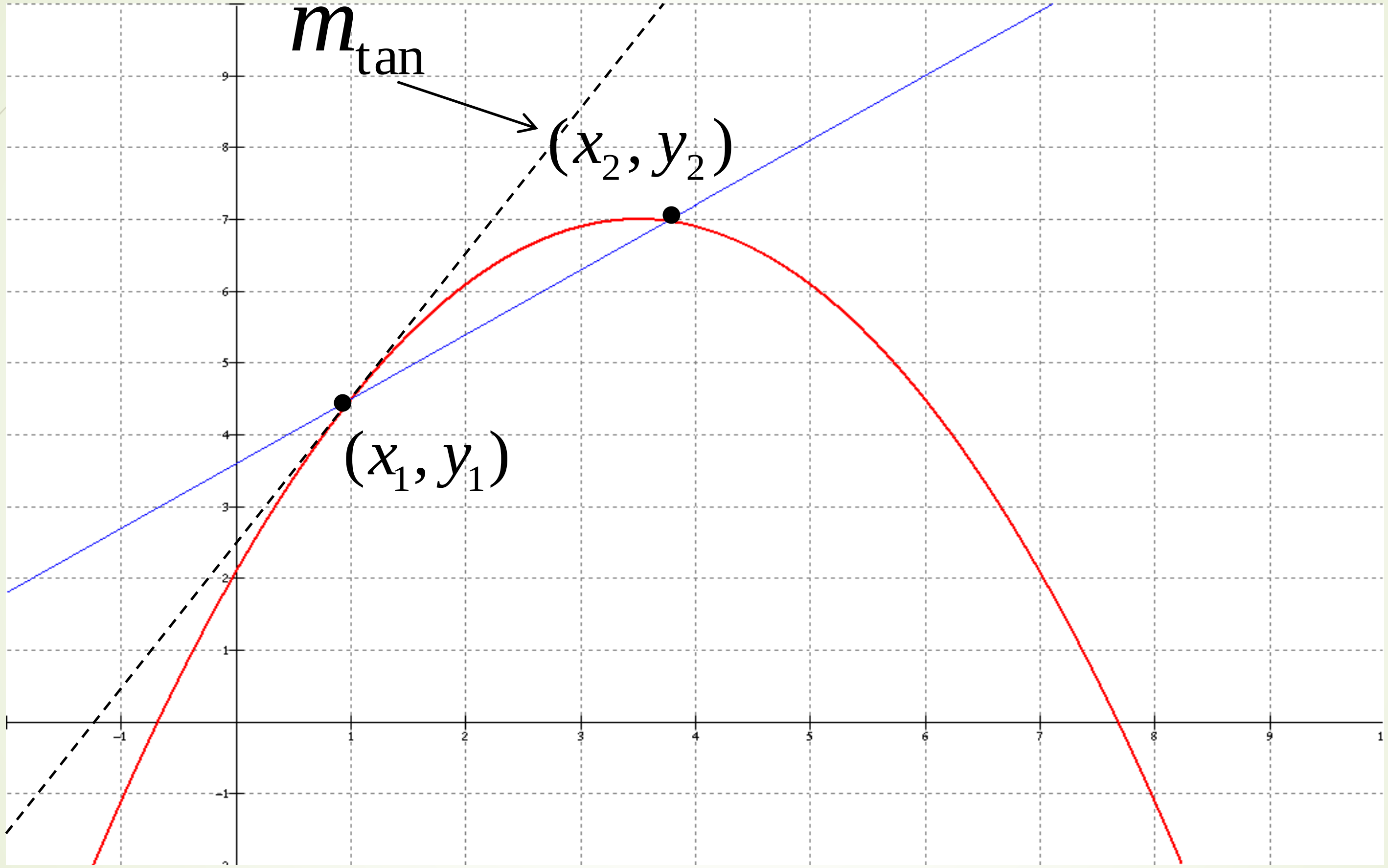


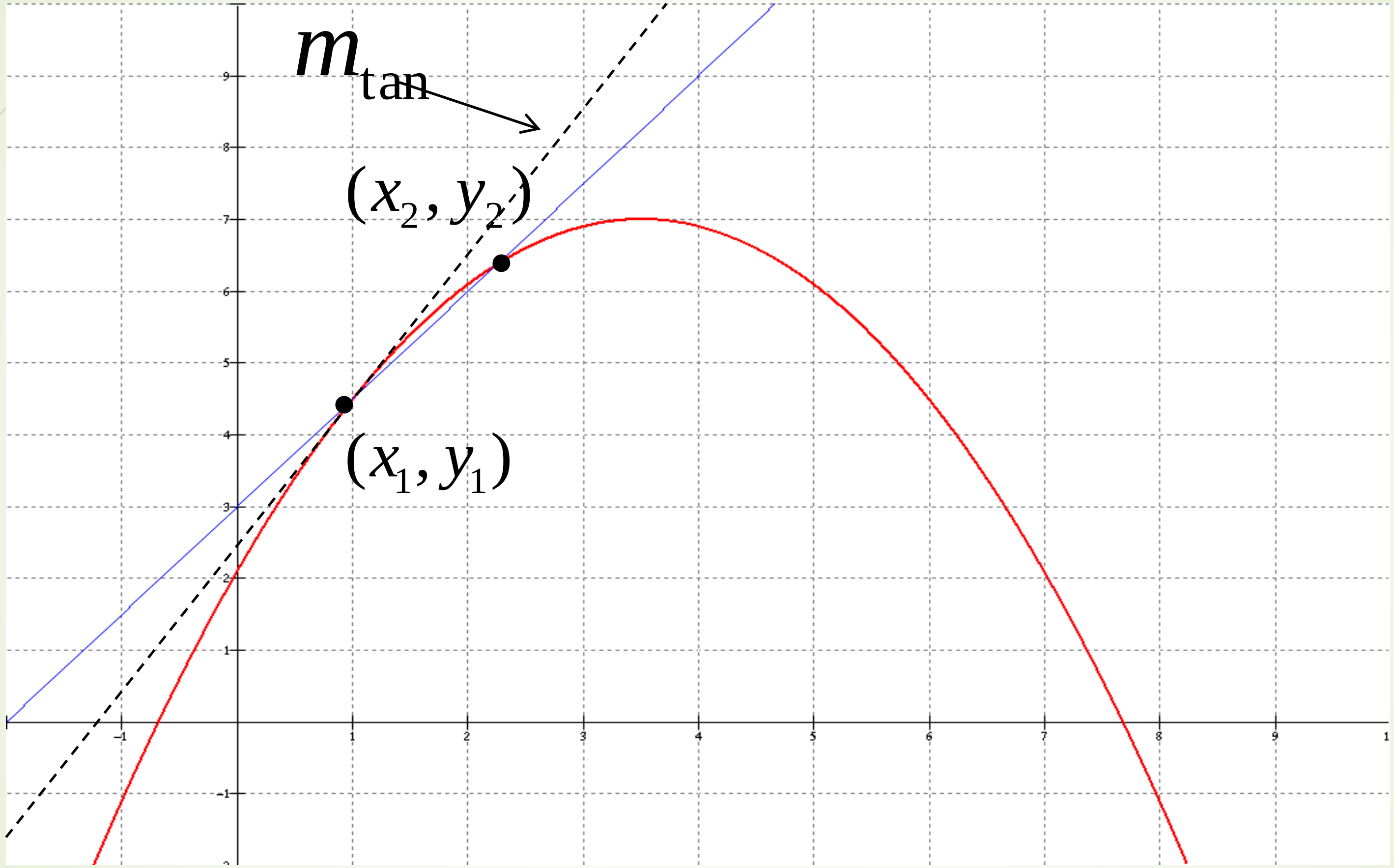
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = ?$$

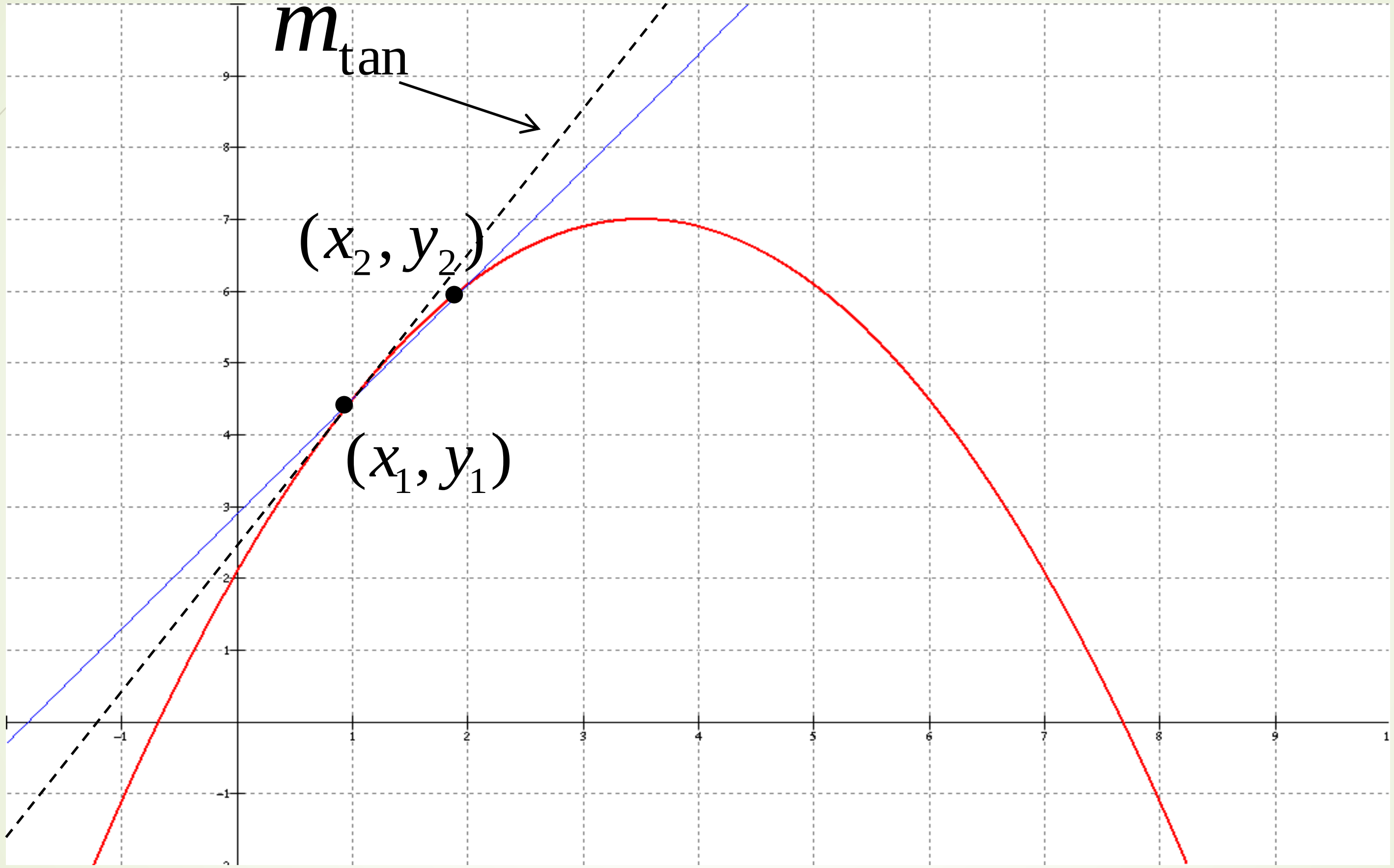

$m_{\tan}$
(x_2, y_2)
(x_1, y_1)

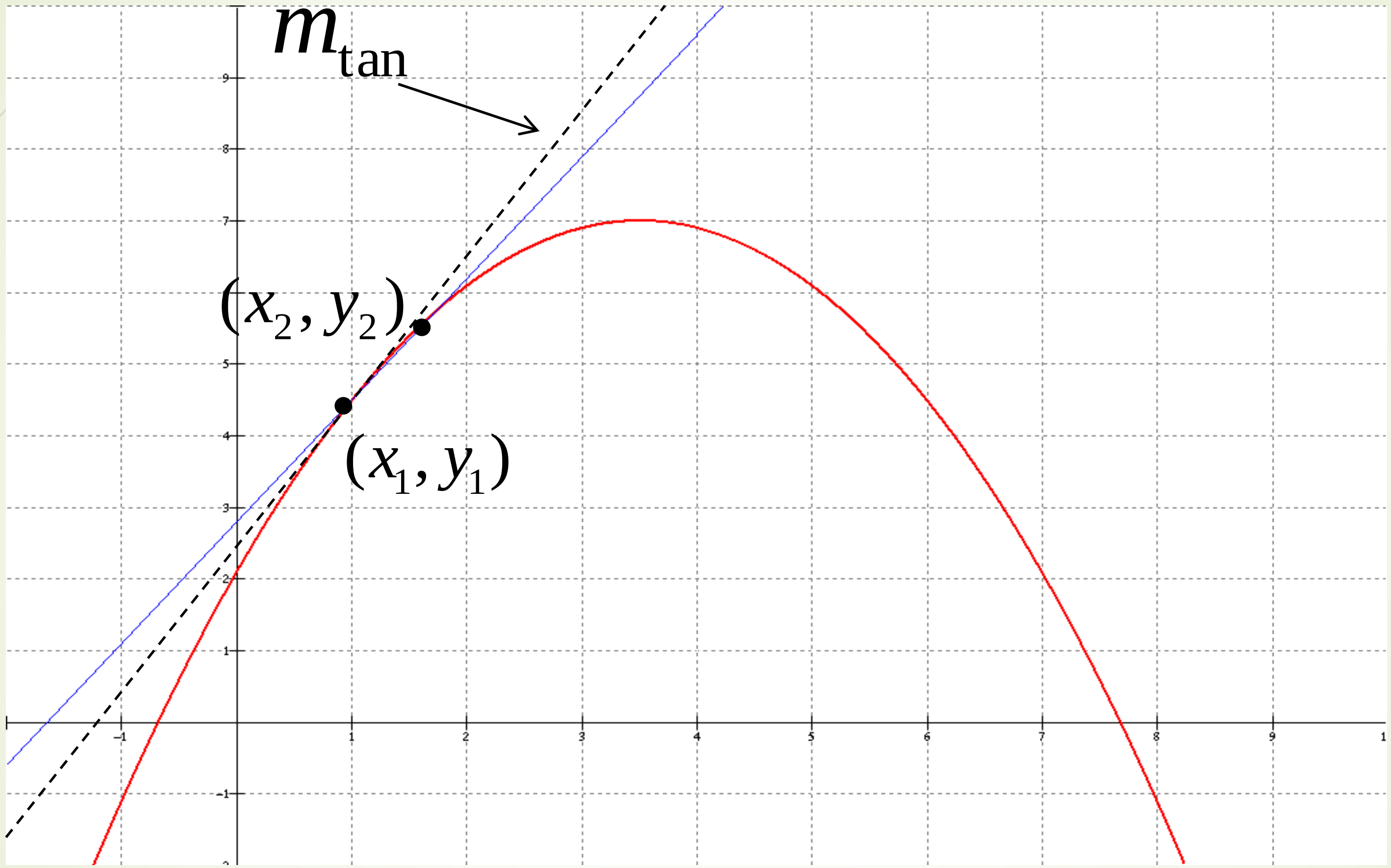

$m_{\tan}$
(x_2, y_2)
(x_1, y_1)

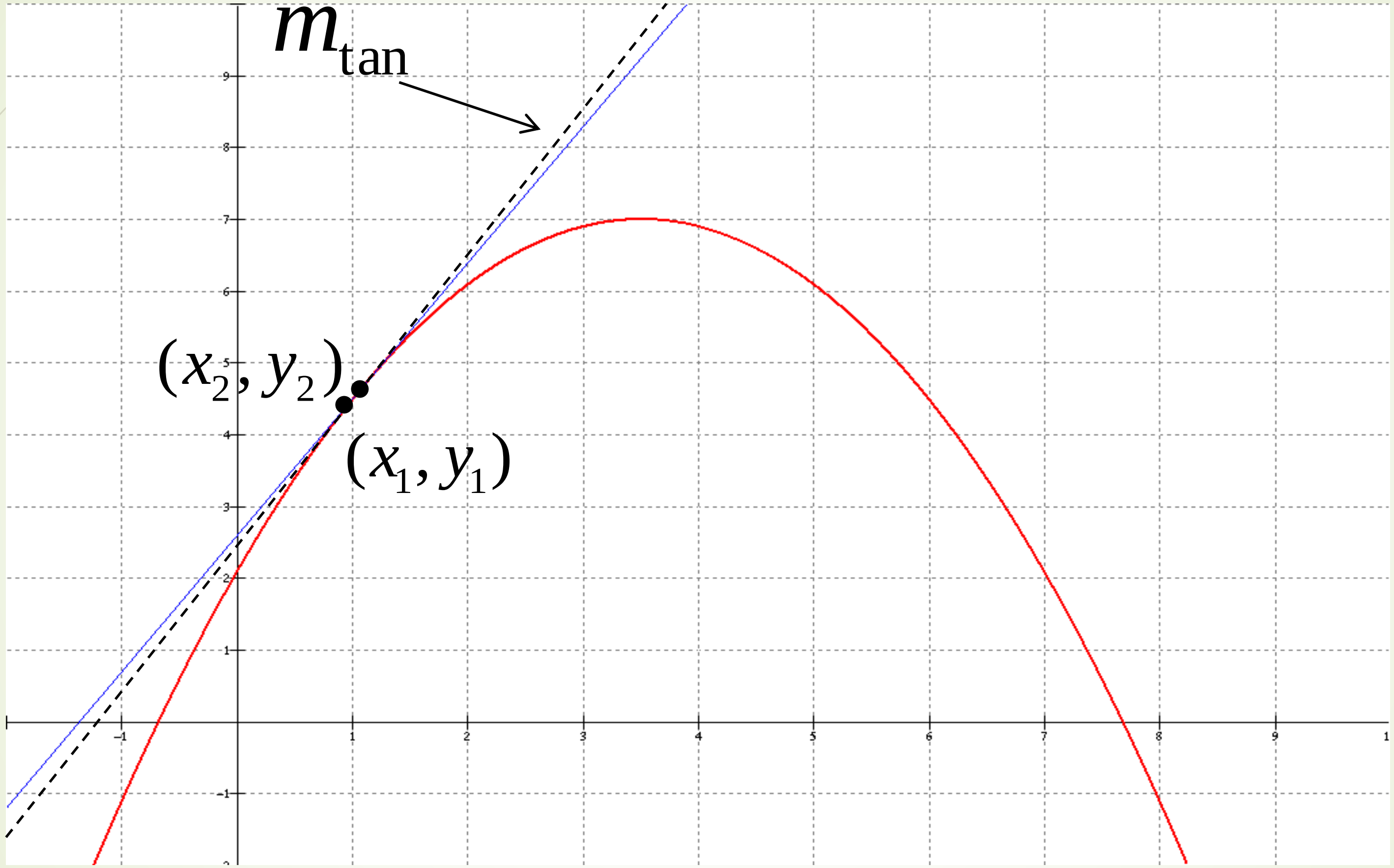

m_{tan}
(x_2, y_2)
(x_1, y_1)

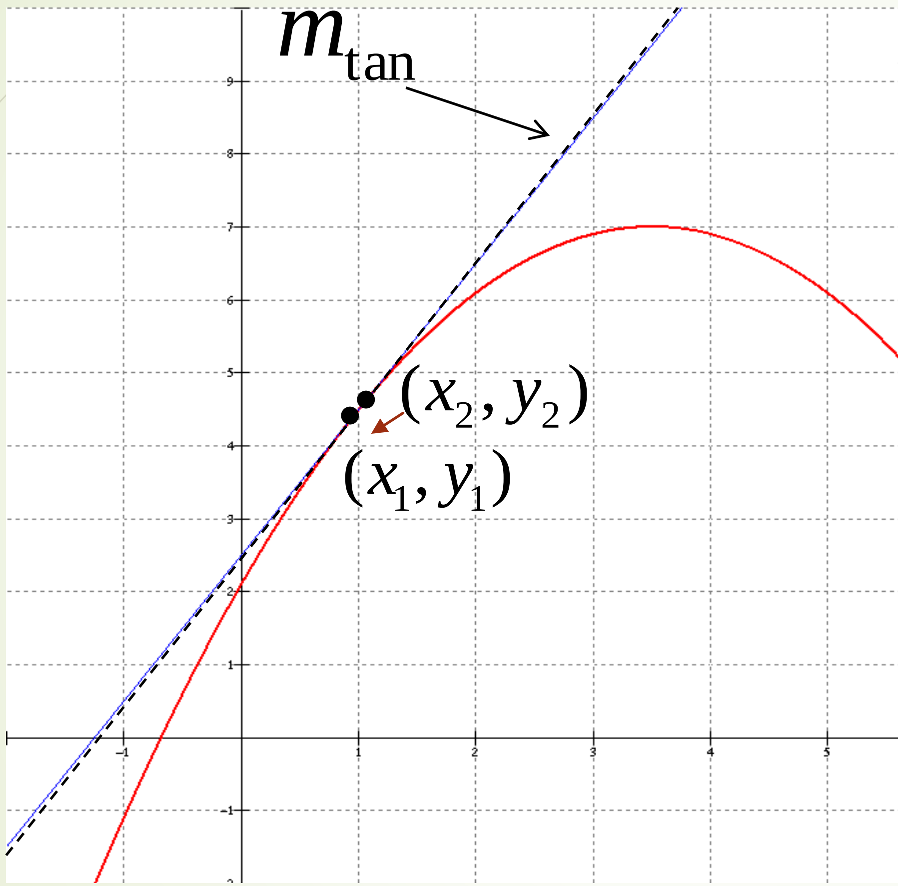

$m_{\tan}$
(x_2, y_2)
(x_1, y_1)


$m_{\tan}$
(x_2, y_2)
(x_1, y_1)


$m_{\tan}$
(x_2, y_2)
(x_1, y_1)


$m_{\tan}$
(x_2, y_2)
(x_1, y_1)


m_{tan}
(x_2, y_2)
(x_1, y_1)

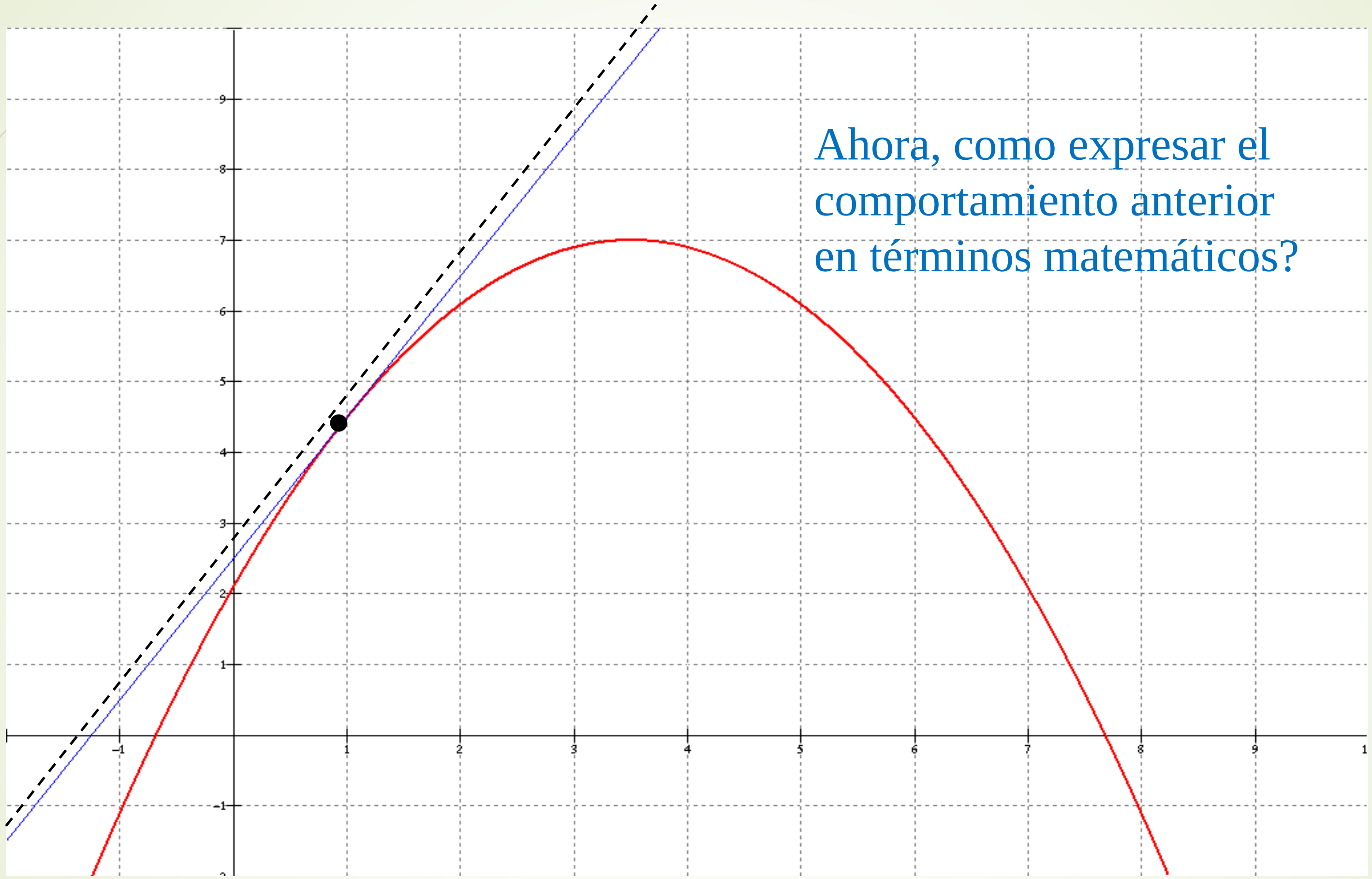


Observa que el punto

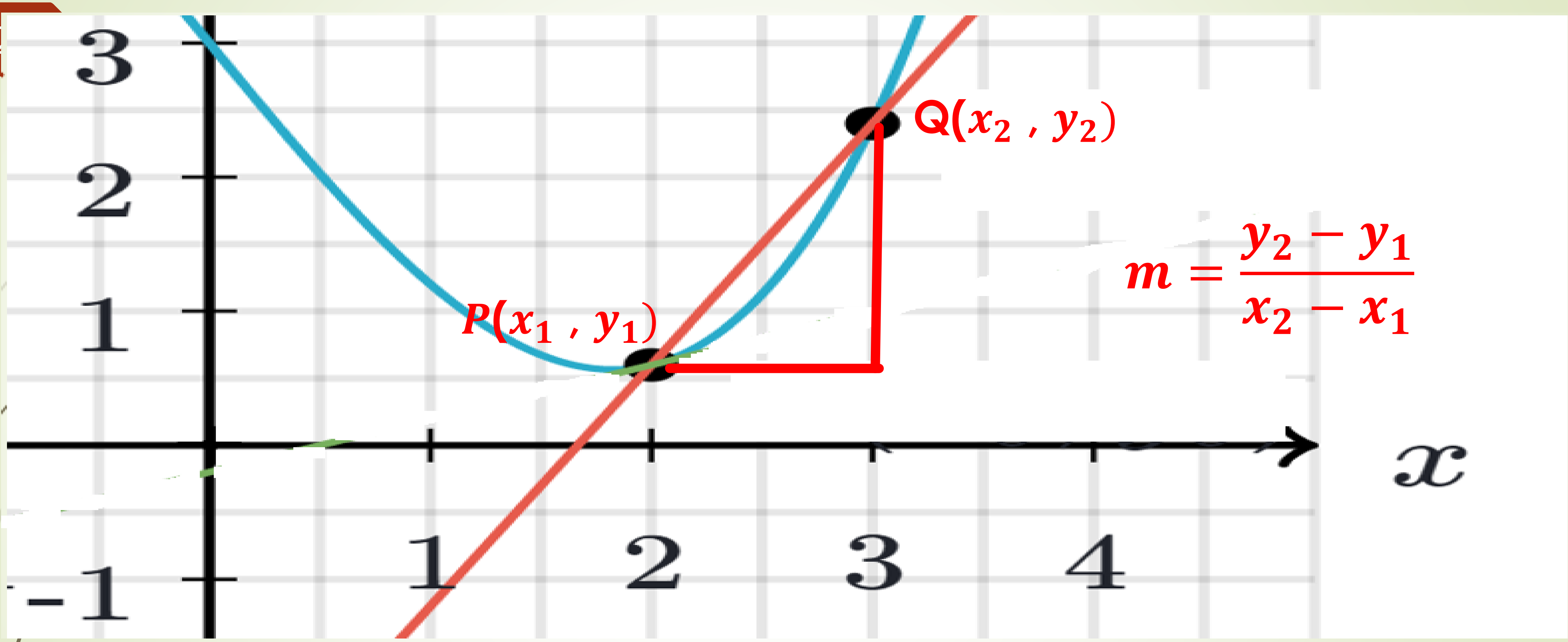
(x_2, y_2)

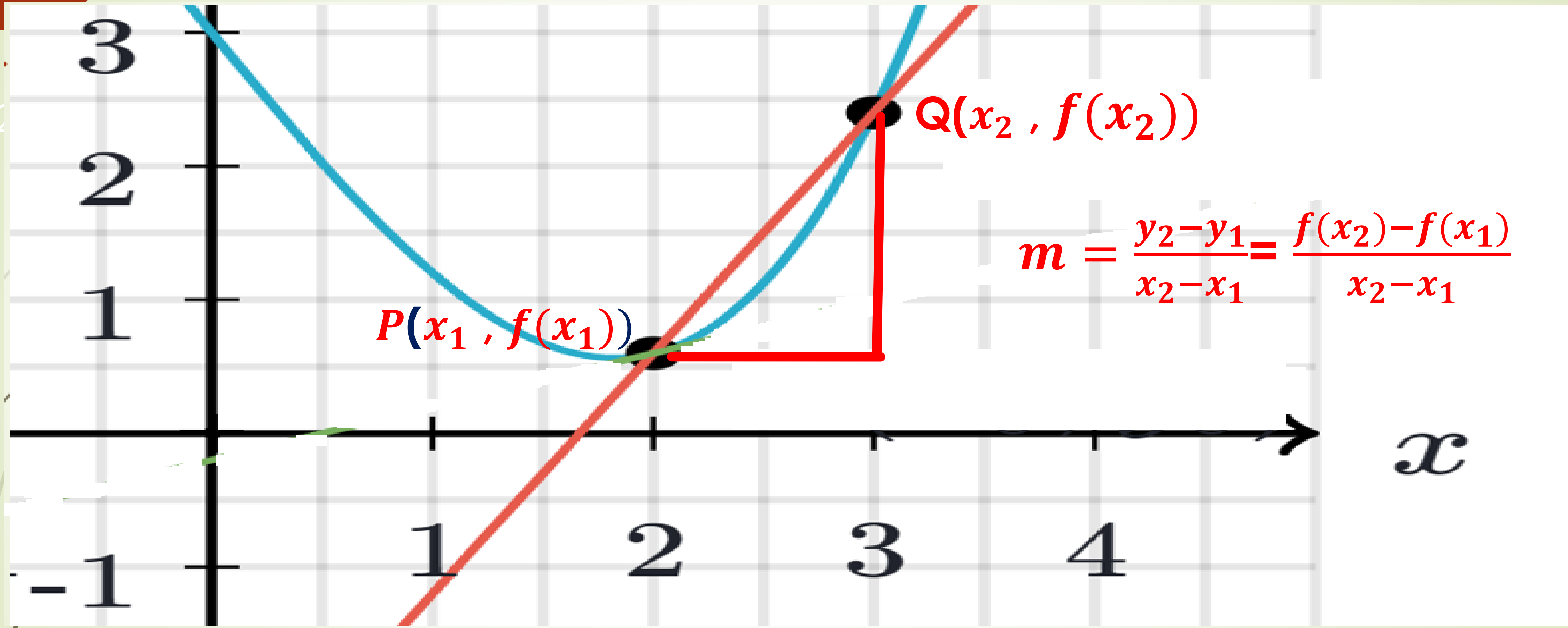
Cada vez se acerca más al punto

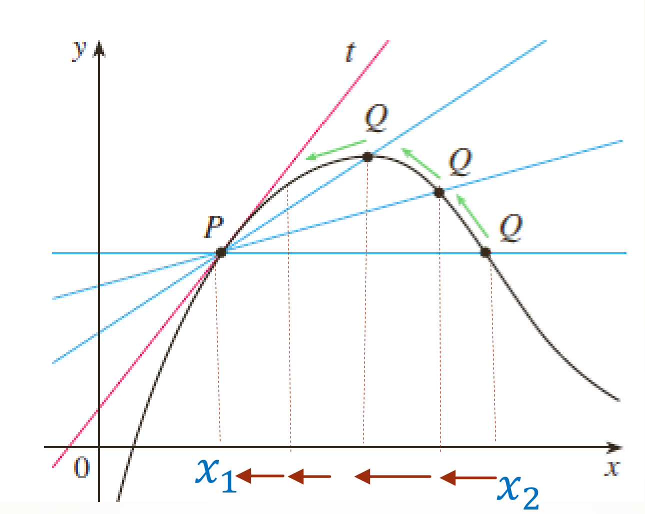
(x_1, y_1)



Ahora, como expresar el comportamiento anterior en términos matemáticos?


3
2
1
-1
1
2
3
4
x
$P(x_1 , y_1)$
$Q(x_2 , y_2)$
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$


3
2
1
-1
1
2
3
4
x
$P(x_1 , f(x_1))$
$Q(x_2 , f(x_2))$
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$



Si dejamos que x_2 tienda a x_1 , entonces Q tenderá a P a lo largo de la gráfica. La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos P y Q tenderá gradualmente a la pendiente de la recta tangente se acerca a tangente en P, a medida que x_2 se acerca x_1.

En el límite, la ecuación $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

se convierte en $$\lim_{x_2 \to x_1} \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right)$$

Si hacemos $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}$, entonces $\boldsymbol{x_2} = x_1 + h$, y $h \to 0$ a medida $\boldsymbol{x_2} \to \boldsymbol{x_1}$. Podemos reescribir el límite como:

$$m_{tang} = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{f(x_1 + h) - f(x_1)}}{\boldsymbol{h}}$$

Cuando el límite existe, su valor m_{tang} es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P($\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{y_1}$).

Si $x_0 = a$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Definición 2.7.1 Recta tangente con pendiente

Sea $y = f(x)$ continua en el número a. Si el límite

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2}$$

existe, entonces la **recta tangente** a la gráfica de f en $(a, f(a))$ es la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente $m_{\tan}$.

Justo como muchos de los problemas analizados antes en este capítulo, observe que el límite en (2) tiene la forma indeterminada $0/0$ cuando $h \to 0$.

Si el límite en (2) existe, el número $m_{\tan}$ también se denomina **pendiente de la curva** $y = f(x)$ en $(a, f(a))$.

Directrices para calcular (2)

i) Evaluar $f(a)$ y $f(a+h)$.

ii) Evaluar la diferencia $f(a+h) - f(a)$. Simplificar.

iii) Simplificar el cociente diferencial

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

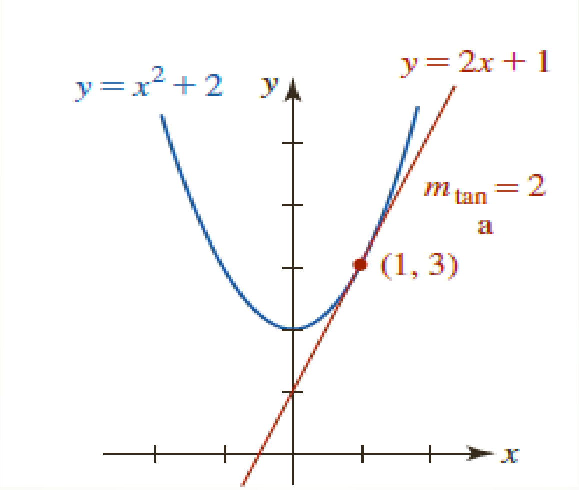
iv) Calcular el límite del cociente diferencial

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

EJEMPLO 1 El proceso de cuatro pasos

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$ en $x = 1$.

Encuentre una ecuación de la recta tangente cuya pendiente se halló en el ejemplo 1.



EJEMPLO 1 El proceso de cuatro pasos

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$ en $x = 1$.

Solución El procedimiento de cuatro pasos presentado antes se usa con el número 1 en lugar del símbolo a.

$f(1)$

i) El paso inicial es el cálculo de $f(1)$ y $f(1 + h)$. Se tiene $f(1) = 1^2 + 2 = 3$, y

$f(a+h)$ →

$$\begin{aligned} f(1 + h) &= (1 + h)^2 + 2 \\ &= (1 + 2h + h^2) + 2 \\ &= 3 + 2h + h^2. \end{aligned}$$

ii) Luego, por el resultado en el paso precedente, la diferencia es:

$f(1+h) - f(1)$ →

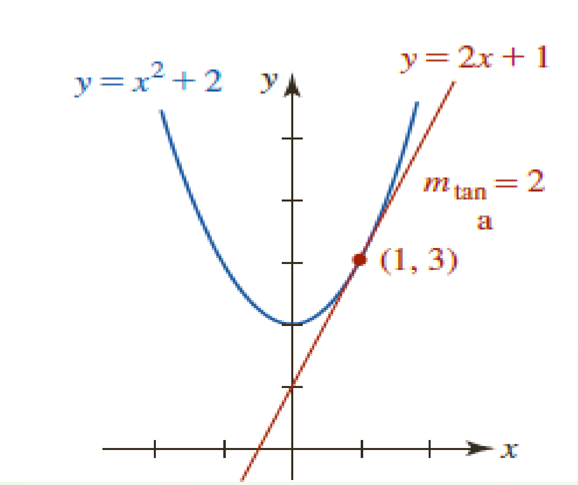
$$\begin{aligned} f(1 + h) - f(1) &= 3 + 2h + h^2 - 3 \\ &= 2h + h^2 \\ &= h(2 + h). \quad \leftarrow \text{observe el factor de } h \end{aligned}$$

iii) Ahora, el cálculo del cociente diferencial $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ es directo. De nuevo, se usan los resultados del paso precedente:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{h(2+h)}{h}=2+h. \leftarrow \text{las } h \text{ se cancelan}$$

iv) Ahora el último paso es fácil. Se observa que el límite en (2) es

$$m_{\tan}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)\overset{\text{por el paso precedente}}{\overset{\downarrow}{-}}f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\overset{\downarrow}{(2+h)}=2.$$



La pendiente de la recta tangente a la curva $y=x^2+2$ en el puno P(1,3) es 2

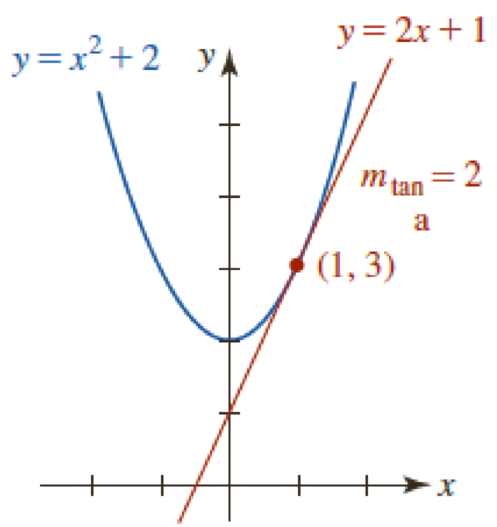


FIGURA 2.7.5 Recta tangente en el ejemplo 2

$$y - y_1 = m(x\text{-}x_1)$$

EJEMPLO 2 Ecuación de la recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente cuya pendiente se halló en el ejemplo 1.

Solución Se conocen el punto de tangencia (1, 3) y la pendiente $m_{\tan} = 2$, de modo que por la ecuación punto-pendiente de una recta se encuentra

$$y - 3 = 2(x - 1) \qquad \text{o bien,} \qquad y = 2x + 1.$$

Observe que la última ecuación es consistente con las intersecciones x y y de la recta roja en la FIGURA 2.7.5. ∎

EJEMPLO 3 Ecuación de la recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 2/x$ en $x = 2$.

EJEMPLO 3 Ecuación de la recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 2/x$ en $x = 2$.

Solución Se empieza por usar (2) para encontrar $m_{\tan}$ con a identificada como 2. En el segundo de los cuatro pasos es necesario combinar dos fracciones simbólicas por medio de un común denominador.

i) Se tiene $f(2) = 2/2 = 1$ y $f(2 + h) = 2/(2 + h)$.

ii)
$$\begin{aligned} f(2+h) - f(2) &= \frac{2}{2+h} - 1 \\ &= \frac{2}{2+h} - \frac{1}{1}\cdot\frac{2+h}{2+h} \quad \leftarrow \text{un común denominador es } 2+h \\ &= \frac{2-2-h}{2+h} \\ &= \frac{-h}{2+h}. \quad \leftarrow \text{aquí está el factor de } h \end{aligned}$$

iii) El último resultado debe dividirse entre h o, más precisamente, entre $\frac{h}{1}$. Se invierte y multiplica por $\frac{1}{h}$:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{\frac{-h}{2+h}}{\frac{h}{1}} = \frac{-h}{2+h}\cdot\frac{1}{h} = \frac{-1}{2+h}. \quad \leftarrow \text{las } h \text{ se cancelan}$$

iv) Por (2), $m_{\tan}$ es

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{2+h} = -\frac{1}{2}.$$

Como $f(2) = 1$, el punto de tangencia es (2, 1) y la pendiente de la recta tangente en (2, 1) es $m_{\tan} = -\frac{1}{2}$. Con base en la ecuación punto-pendiente de una recta, la recta tangente es

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x-2) \qquad \text{o} \qquad y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Las gráficas de $y = 2/x$ y la recta tangente en (2, 1) se muestran en la FIGURA 2.7.6. ■

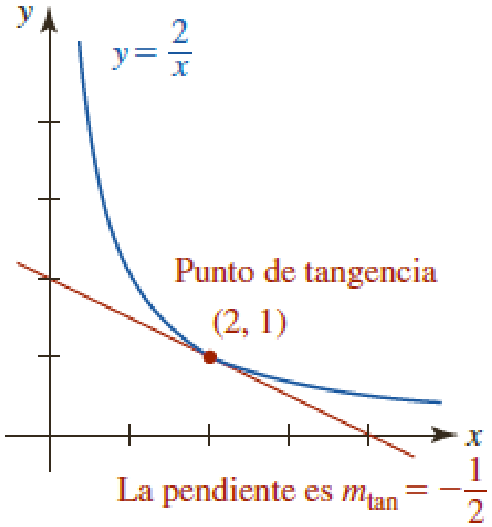


FIGURA 2.7.6 Recta tangente en el ejemplo 3

EJEMPLO 4 Pendiente de una recta tangente

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x - 1}$ en $x = 5$.

$$f(x) = \sqrt{x-1} \quad (2)$$

EJEMPLO 4 Pendiente de una recta tangente

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-1}$ en $x = 5$.

Solución Al sustituir a por 5 en (2) se tiene:

i) $f(5) = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$, y

$$f(5+h) = \sqrt{5+h-1} = \sqrt{4+h}.$$

ii) La diferencia es

$$f(5+h) - f(5) = \sqrt{4+h} - 2.$$

Debido a que se espera encontrar un factor de h en esta diferencia, procedemos a racionalizar el numerador:

$$\begin{aligned} f(5+h) - f(5) &= \frac{\sqrt{4+h}-2}{1} \cdot \frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2} \\ &= \frac{(4+h)-4}{\sqrt{4+h}+2} \\ &= \frac{h}{\sqrt{4+h}+2}. \quad \leftarrow \text{éste es el factor de } h \end{aligned}$$

iii) Así, el cociente diferencial $\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}$ es:

$$\frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \frac{\dfrac{h}{\sqrt{4+h}+2}}{h}$$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4+h}+2}.$$

iv) El límite en (2) es

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}.$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=\sqrt{x-1}$ en $(5, 2)$ es $\frac{1}{4}$. ■

Ejemplo 1

Encuentra la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ en el punto $(2, 8)$.

Como $(x_0, y_0) = (2, 8)$, al usar la fórmula de la pendiente de la recta tangente

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(h^3 + 6h^2 + 12h + 8) - 8}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h^3 + 6h^2 + 12h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (h^2 + 6h + 12) \\ &= 12. \end{aligned}$$

Definición 2.7.2 Velocidad instantánea

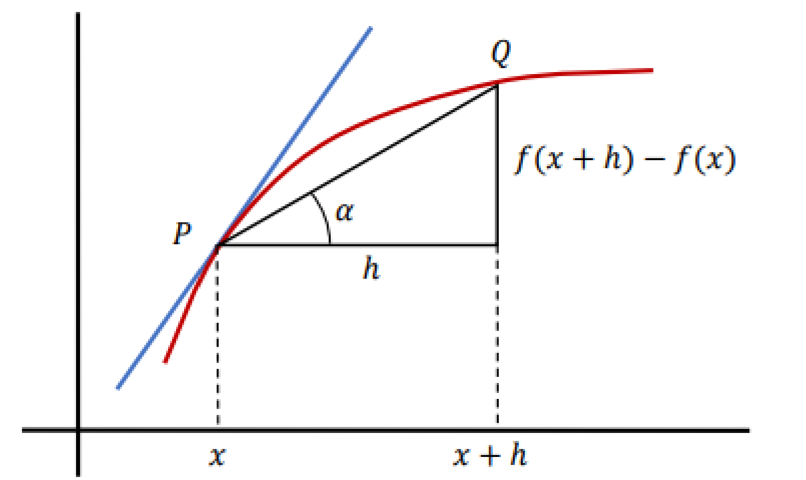
en función del tiempo

Sea $f = f(t)$ una función que proporciona la posición de un objeto que se mueve en línea recta. Entonces la **velocidad instantánea** en el instante $t = t_0$ es

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - (t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}, \tag{8}$$

siempre que el límite exista.

La derivada



■ **Introducción** En la última sección del capítulo 2 vimos que la recta tangente a una gráfica de una función $y = f(x)$ es la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente dada por

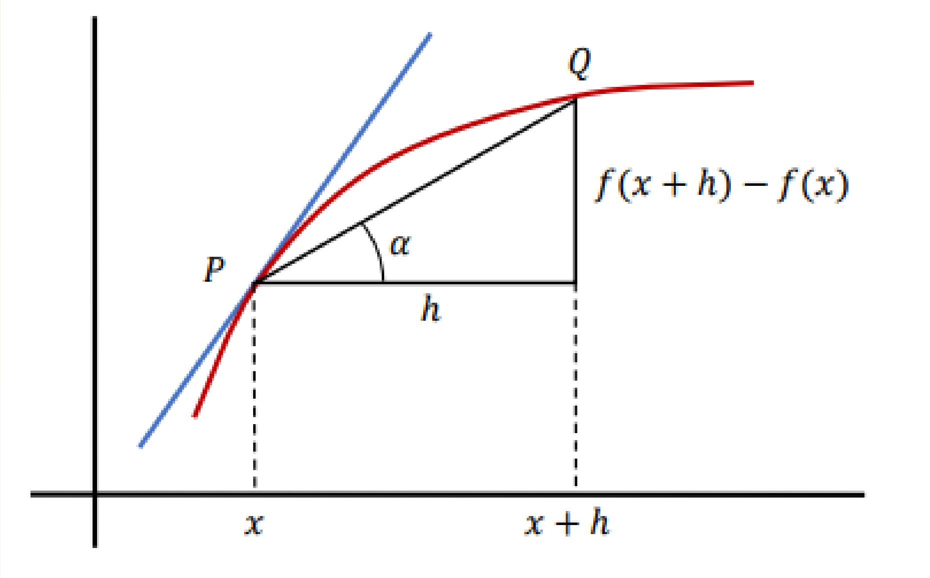
$$\boxed{m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}}$$

siempre que el límite exista. Para muchas funciones suele ser posible obtener una fórmula general que proporcione el valor de la pendiente de la recta tangente. Esto se lleva a cabo al calcular

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}} \tag{1}$$

para *cualquier* x (para la que existe el límite). Luego sustituimos un valor de x *después* que se ha encontrado el límite.

Una definición El límite del cociente de la diferencia en (1) define una función: una función que se *deriva* de la función original $y = f(x)$. Esta nueva función se denomina **función derivada**, o simplemente la **derivada**, de f y se denota por f'.



Definición 3.1.1 Derivada

La **derivada** de una función $y = f(x)$ en x está dada por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (2)$$

siempre que el límite exista.

EJEMPLO 1 Una derivada

Encuentre la derivada de $f(x) = x^2 + 2$.

Solución Así como en el cálculo de $m_{\tan}$ en la sección 2.7, el proceso de encontrar la derivada $f'(x)$ consta de cuatro pasos:

i) $f(x + h) = (x + h)^2 + 2 = x^2 + 2xh + h^2 + 2$

ii) $f(x + h) - f(x) = [x^2 + 2xh + h^2 + 2] - x^2 - 2 = h(2x + h)$

iii) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \dfrac{h(2x + h)}{h} = 2x + h$ ← las h se cancelan

iv) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} [2x + h] = 2x.$

Por el paso *iv)* vemos que la derivada de $f(x) = x^2 + 2$ es $\boxed{f'(x) = 2x.}$

Observe que el resultado $m_{\tan} = 2$ en el ejemplo 1 de la sección 2.7 se obtiene al evaluar la derivada $f'(x) = 2x$ en $x = 1$, es decir, $\boxed{f'(1) = 2.}$

EJEMPLO 2 Valor de la derivada

Para $f(x) = x^2 + 2$, encuentre $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$ y $f'(1)$. Interprete.

Solución Por el ejemplo 1 sabemos que la derivada es $f'(x) = 2x$. Por tanto,

$$f'(x) = 2x.$$

en $x = -2$, $\begin{cases} f(-2) = 6 & \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (-2, 6) \\ f'(-2) = -4 & \leftarrow \text{la pendiente de la recta tangente en } (-2, 6) \text{ es } m = -4 \end{cases}$

en $x = 0$, $\begin{cases} f(0) = 2 & \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (0, 2) \\ f'(0) = 0 & \leftarrow \text{la pendiente de la recta tangente en } (0, 2) \text{ es } m = 0 \end{cases}$

Para hallar la pendiente de la recta o derivada de esa función en cualquier otro punto, simplemente evalúo la nueva función f´ en esos puntos.

EJEMPLO 2 Valor de la derivada

Para $f(x) = x^2 + 2$, encuentre $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ y $f'(1)$. Interprete.

Solución Por el ejemplo 1 sabemos que la derivada es $f'(x) = 2x$. Por tanto,

$f(x) = x^2 + 2$, en $x = -2$, $f(-2) = 6$ ← el punto de tangencia es $(-2, 6)$

$f'(x) = 2x$. en $x = -2$, $f'(-2) = -4$ ← la pendiente de la recta tangente en $(-2, 6)$ es $m = -4$

$f(x) = x^2 + 2$, en $x = 0$, $f(0) = 2$ ← el punto de tangencia es $(0, 2)$

$f'(x) = 2x$. en $x = -2$, $f'(0) = 0$ ← la pendiente de la recta tangente en $(0, 2)$ es $m = 0$

Para hallar la pendiente de la recta o derivada de esa función en cualquier otro punto, simplemente evalúo la nueva función f´ en esos puntos.

■ **Valor de una derivada** El **valor** de la derivada en un número a se denota por los símbolos

$$f'(a), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}, \quad y'(a), \quad \left.D_x y\right|_{x=a}.$$

Por el ejemplo 6, el valor de la derivada de $y = \sqrt{x}$ en, por ejemplo, $x = 9$ se escribe

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=9} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=9} = \frac{1}{6}.$$

En forma alterna, para evitar la torpe barra vertical, simplemente escribimos $y'(9) = \frac{1}{6}$. ■

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 2) = 2x, \quad \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

El símbolo

$$\frac{dy}{dx} \qquad \text{entonces significa} \qquad \frac{d}{dx}\,y.$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (2)$$

Diferenciabilidad Si el límite en (2) existe para un número x dado en el dominio de f, se dice que la función es **diferenciable** en x. Si una función f es diferenciable en todo número x en los intervalos abiertos (a, b), $(-\infty, b)$ y (a, ∞), entonces f es **diferenciable sobre el intervalo abierto**. Si f es diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$, entonces se dice que f es **diferenciable en todas partes**.

Se dice que una función f es **diferenciable sobre un intervalo cerrado** $[a, b]$ cuando f es diferenciable sobre el intervalo abierto (a, b), y

$$
\begin{aligned}
f'_{+}(a) &= \lim_{h \to 0^{+}} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \\
f'_{-}(b) &= \lim_{h \to 0^{-}} \frac{f(b + h) - f(b)}{h}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

ambos existen. Los límites en (4) se denominan **derivadas por la derecha y por la izquierda,** respectivamente.

EJEMPLO 8 Diferenciabilidad

a) La función $f(x) = x^2 + 2$ es diferenciable para todos los números reales x; es decir, el dominio de $f'(x) = 2x$ es $(-\infty, \infty)$.

b) Debido a que $f(x) = 1/x$ es discontinua en $x = 0$, f no es diferenciable en $x = 0$ y en consecuencia no es diferenciable sobre cualquier intervalo que contenga 0. ■

Dónde f no es diferenciable Una función no tiene derivada en $x = a$ si

i) la función es discontinua en $x = a$, o
ii) la gráfica de f tiene un pico en $(a, f(a))$.

Además, puesto que la derivada proporciona la pendiente, f no es diferenciable

iii) en un punto $(a, f(a))$ en el cual la recta tangente es vertical.

El dominio de la derivada f', definido por (2), es el conjunto de números x para los cuales el límite existe. Por tanto, el dominio de f' necesariamente es un subconjunto del dominio de f.

Teorema 3.2.1 Regla de potencias

Para cualquier número real n,

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}. \tag{3}$$

Teorema 3.2.2 Regla de la función constante

Si $f(x) = c$ es una función constante, entonces $f'(x) = 0$. (4)

Teorema 3.2.3 Regla de la multiplicación por constante

Si c es cualquier constante y f es diferenciable en x, entonces cf es diferenciable en x, y

$$\frac{d}{dx}cf(x) = cf'(x). \tag{5}$$

Teorema 3.2.4 Reglas de suma y diferencia

Si f y g son diferenciables en x, entonces $f + g$ y $f - g$ son diferenciables en x, y

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x), \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x). \tag{7}$$

EJEMPLO 4 Recta tangente

Encuentre una ecuación de una recta tangente a la gráfica $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 7x$ en el punto correspondiente a $x = -1$.

Solución Por la regla de la suma,

$$f'(x) = 3(4x^3) + 2(3x^2) - 7(1) = 12x^3 + 6x^2 - 7.$$

Cuando las f y f' se evalúan en el mismo número $x = -1$, obtenemos

$$f(-1) = 8 \qquad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (-1, 8)$$

$$f'(-1) = -13. \qquad \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } (-1, 8) \text{ es } -13$$

Con la ecuación punto-pendiente obtenemos una ecuación de la recta tangente

$$y - 8 = -13(x - (-1)) \qquad \text{o bien,} \qquad y = -13x - 5.$$

EJEMPLO 5 Volver a escribir los términos de una función

Diferencie $y = 4\sqrt{x} + \dfrac{8}{x} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}} + 10.$

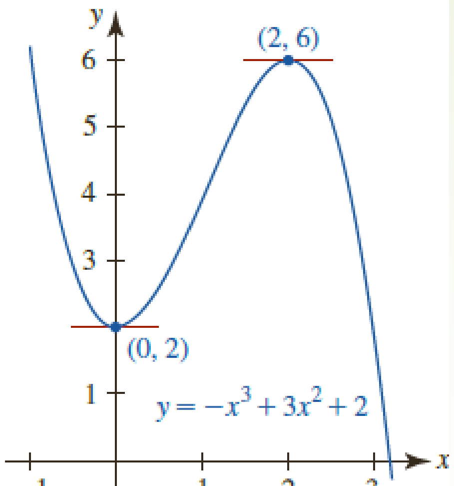


FIGURA 3.2.3 Gráfica de la función en el ejemplo 6

EJEMPLO 6 Tangentes horizontales

Encuentre los puntos sobre la gráfica de $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$ donde la recta tangente es horizontal.

Solución En un punto $(x, f(x))$ sobre la gráfica de f donde la tangente es horizontal, debemos tener $f'(x) = 0$. La derivada de f es $f'(x) = -3x^2 + 6x$ y las soluciones de $f'(x) = -3x^2 + 6x = 0$ o $-3x(x - 2) = 0$ son $x = 0$ y $x = 2$. Así, los puntos correspondientes son $(0, f(0)) = (0, 2)$ y $(2, f(2)) = (2, 6)$. Vea la FIGURA 3.2.3.

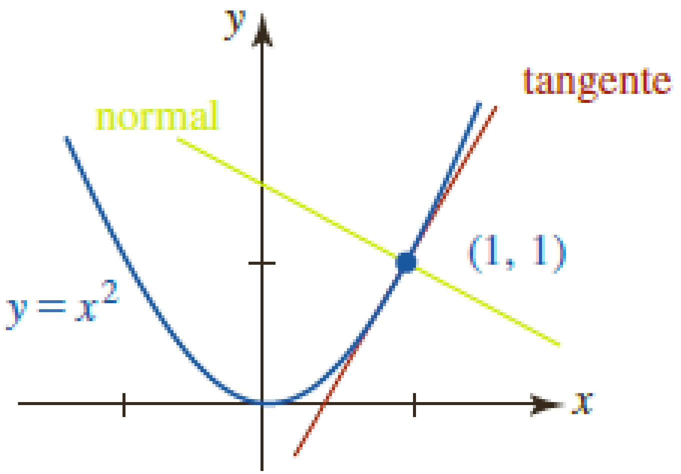


FIGURA 3.2.4 Recta normal en el ejemplo 7

EJEMPLO 7 Ecuación de una recta normal a la recta tangente en x=1

Encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = x^2$ en $x = 1$.

Solución Puesto que $dy/dx = 2x$, sabemos que $m_{\tan} = 2$ en $(1, 1)$. Por tanto, la pendiente de la recta normal que se muestra en verde en la FIGURA 3.2.4 es el negativo recíproco de la pendiente de la recta tangente; es decir, $m = -\frac{1}{2}$. Por la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, entonces una ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \qquad \text{o bien,} \qquad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Derivadas de orden superior

Derivadas de orden superior Hemos visto que la derivada $f'(x)$ es una función derivada de $y = f(x)$. Al diferenciar la primera derivada obtenemos otra función denominada **segunda derivada**, que se denota por $f''(x)$. En términos del símbolo de operación d/dx, la segunda derivada con respecto a x la definimos como la función que se obtiene al diferenciar dos veces consecutivas a $y = f(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

La segunda derivada suele denotarse por los símbolos

$$f''(x), \quad y'', \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x), \quad D^2, \quad D_x^2.$$

EJEMPLO 9 Segunda derivada

Encuentre la segunda derivada de $y = \dfrac{1}{x^3}$.

Solución Primero se simplifica la ecuación al escribirla como $y = x^{-3}$. Luego, por la regla de potencias (3) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -3x^{-4}.$$

La segunda derivada se obtiene al diferenciar la primera derivada

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-3x^{-4}) = -3(-4x^{-5}) = 12x^{-5} = \frac{12}{x^5}.$$ ■

Teorema 3.3.1 Regla del producto

Si f y g son funciones diferenciables en x, entonces fg es diferenciable en x, y

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \tag{3}$$

La derivada de una primera función por una segunda es igual a la primera por la derivada de la segunda más la segunda por la derivada de la primera.

Teorema 3.3.2 Regla del cociente

Si f y g son funciones diferenciables en x y $g(x) \neq 0$, entonces f/g es diferenciable en x, y

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}. \qquad (4)$$

La derivada de un cociente es igual al denominador por derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo sobre el denominador al cuadrado.