Continuidad y Funciones compuestas

❖**MIS VALORES**

Entrega

Transparencia

Simplicidad

y Persistencia

❖**MI VISIÓN:** Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖**MI MISIÓN:** Entrega a la Voluntad Suprema.

Servir a las personas.

FUNCIONES COMPUESTAS

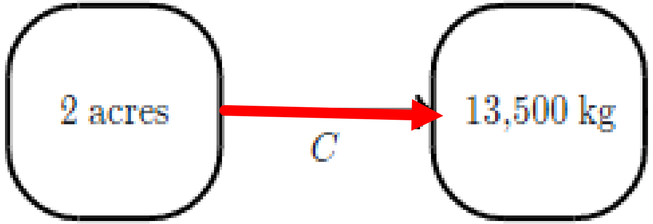
Las siguientes diapositvas fueron tomadas directamente de la página web de “KHAN ACDEMY”.

https://es.khanacademy.org/math/algebra2/manipulating-functions/function-composition/a/introduction-to-function-composition

Cam es un agricultor. Cada año siembra semillas de maíz. La siguiente función indica la cantidad de maíz, C in kilogramos (kg), que él espera cosechar en a acres de terreno.

$$C(a) = 7500a - 1500$$

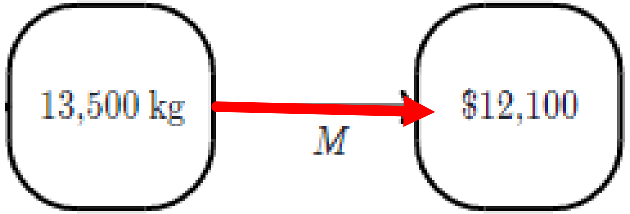
Por ejemplo, si Cam siembra dos acres, él espera cosechar $C(2) = 7500(2) - 1500 = 13{,}500 \text{ kg}$ de maíz.



Pero a Cam le interesa más saber cuánto dinero ganará al vender su maíz. Así que utiliza la siguiente función para predecir la cantidad de dinero, M en pesos, que él obtendrá al vender c kilogramos de maíz.

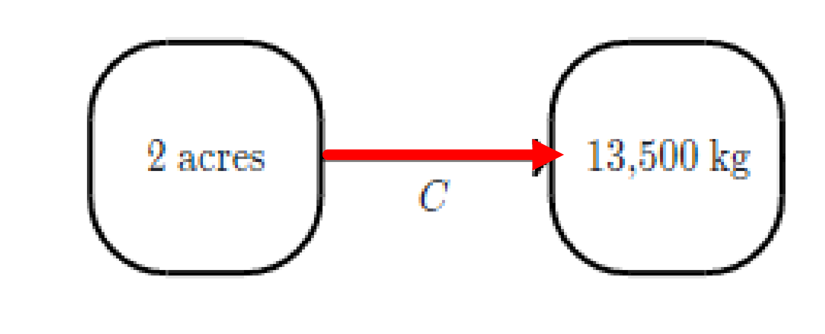
$$M(c) = 0.9c - 50$$

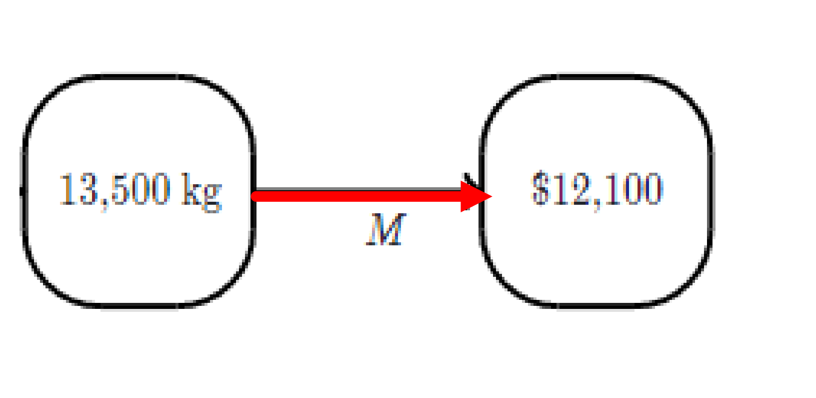
Entonces, si Cam cosecha 13.500 kg de maíz, él espera obtener $M(13{,}500) = 0.9(13{,}500) - 50 = \$12{,}100$.



https://es.khanacademy.org/math/algebra2/manipulating-functions/function-composition/e/evaluate-composite-functions-from-graphs-and-tables

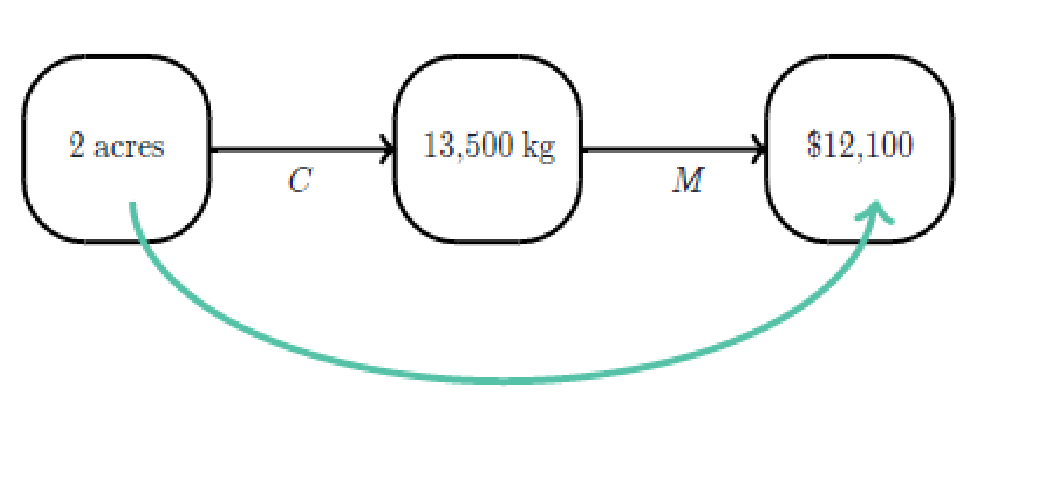
Observa que Cam utiliza *dos* funciones separadas para obtener ganancias esperadas a partir de acres cosechados. La primera función, C, convierte de acres a cantidad de maíz, mientras que la segunda, M, convierte de maíz a cantidad de dinero.





https://es.khanacademy.org/math/algebra2/manipulating-functions/function-composition/e/evaluate-composite-functions-from-graphs-and-tables

¿No sería genial si Cam pudiera escribir una función que convierta de acres sembrados directamente a ganancias esperadas? ¿Existirá tal función?



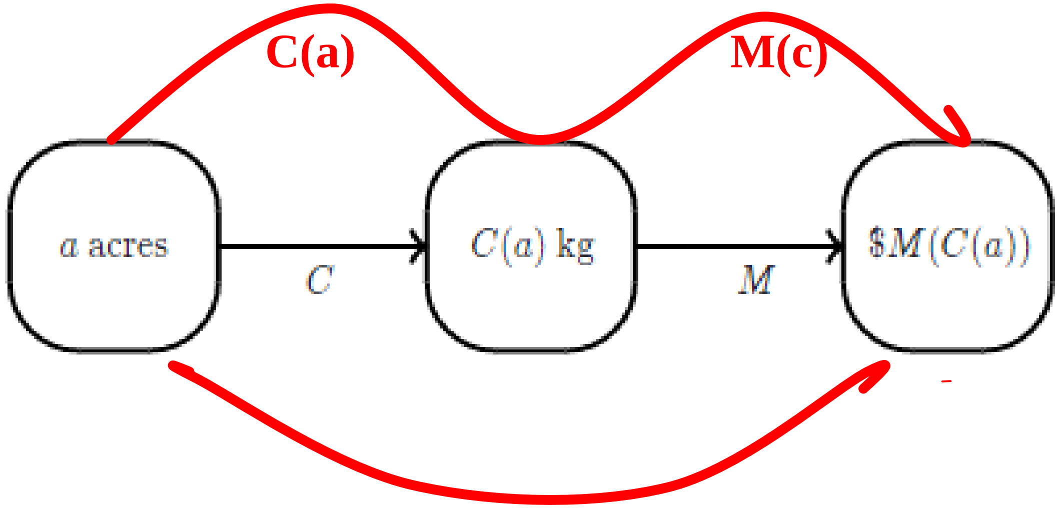
https://es.khanacademy.org/math/algebra2/manipulating-functions/function-composition/e/evaluate-composite-functions-from-graphs-and-tables

Crear una nueva función

De hecho, ¡sí podemos encontrar la función que convierte de acres sembrados directamente a ganacias esperadas! Para encontrar esta función, pensemos en la pregunta más general: ¿cuánto dinero puede Cam esperar ganar si siembra maíz en a acres de terreno?

https://es.khanacademy.org/math/algebra2/manipulating-functions/function-composition/e/evaluate-composite-functions-from-graphs-and-table2

Pues bien, si Cam siembra maíz en a acres, él espera cosechar $C(a)$ kilogramos de maíz. Y si cosecha $C(a)$ kilogramoss de maíz. él espera ganar $M(C(a))$ pesos.



Entonces, para encontrar la regla general que convierta a acres directamente a ganancias esperadas, podemos determinar la expresión $M(C(a))$= (M∘C)(a)

Evaluamos la segunda función con la primera función. Y no evitamos el paso intermedio.

https://es.khanacademy.org/math/algebra2/manipulating-functions/function-composition/e/evaluate-composite-functions-from-graphs-and-tables

¿Pero cómo hacer esto? Observemos que en la expresión $M(C(a))$, el valor de entrada de la función M es $C(a)$. Así que para encontrar esta expresión, podemos sustituir $C(a)$ como valor de entrada c en la función M.

Método del cajón

$$M(c) = 0.9c - 50$$

M( )= 0.9( ) − 50

$$C(a) = 7500a - 1500$$

$$M(\underline{C(a)}) = 0.9(C(a)) - 50$$

valor de entrada

$$= 0.9(7500a - 1500) - 50$$

Pues $C(a) = 7500a$ -

$$= 6750a - 1350 - 50$$

$$\boxed{M(C(a)) = 6750a - 1400}$$

https://es.khanacademy.org/math/algebra2/manipulating-functions/function-composition/e/evaluate-composite-functions-from-graphs-and-tables

De esta manera la función $\boxed{M(C(a)) = 6750a - 1400}$ convierte acres sembrados directamente a ganancias esperadas. Usemos esta nueva función para predecir la cantidad de dinero que Cam obtendría al sembrar maíz en dos acres.

$$M(C(2)) = 6750(2) - 1400 = \$12{,}100$$

Cam puede esperar obtener $\$12100$ al sembrar maíz en dos acres de terreno, ¡lo que es consistente con el primer resultado!

https://es.khanacademy.org/math/algebra2/manipulating-functions/function-composition/e/evaluate-composite-functions-from-graphs-and-tables

Definir funciones compuestas

Hemos encontrado lo que se conoce como una **función compuesta**. En lugar de sustituir acres sembrados en la función del maíz, y después la cantidad de maíz cosechado en la función del dinero, hemos encontrado una función que convierte acres sembrados directamente a ganancias esperadas.

(al valorar la función M (x) con la otra función C (a) se halla la función compuesta (M○C) (a)

Hicimos esto al sustituir $C(a)$ en la función M, o sea al encontrar $M(C(a))$. Llamemos $M \circ C$ a esta nueva función, que se lee como "M compuesta con C".

Ahora sabemos que $\boxed{(M \circ C)(a) = M(C(a))}$. Esta es, de hecho, ¡la definición formal de composición de funciones!

$$\begin{tikzcd} \text{2 acres} \arrow[r, "C"'] \arrow[rr, bend right, "M \circ C"'] & \text{13,500 kg} \arrow[r, "M"'] & \text{\$12,100} \end{tikzcd}$$

Al utilizar las funciones C y M, la función C (la del maíz) convierte dos a 13,500. Después la función M (la del dinero) convierte 13,500 a $12,100.

Mediante la función compuesta, vemos que $M \circ C$ convierte 2 directamente a $12,100. Evita un paso en la conversión.

¡Ambas son equivalentes!

Hacer este problema

Problema 2

Ben es un agricultor de papas. La función $P(a) = 25{,}000a - 1000$ indica la cantidad de papas, P en kilogramos, que él espera cosechar al sembrarlas en a acres de terreno; y la función $M(p) = 0.2p - 200$ indica la cantidad de dinero, M en pesos, que Ben espera ganar si cosecha p kilogramos de papas.

¿Cuánto dinero puede Ben esperar ganar si vende todas las papas cosechadas en tres acres?

Problema 3

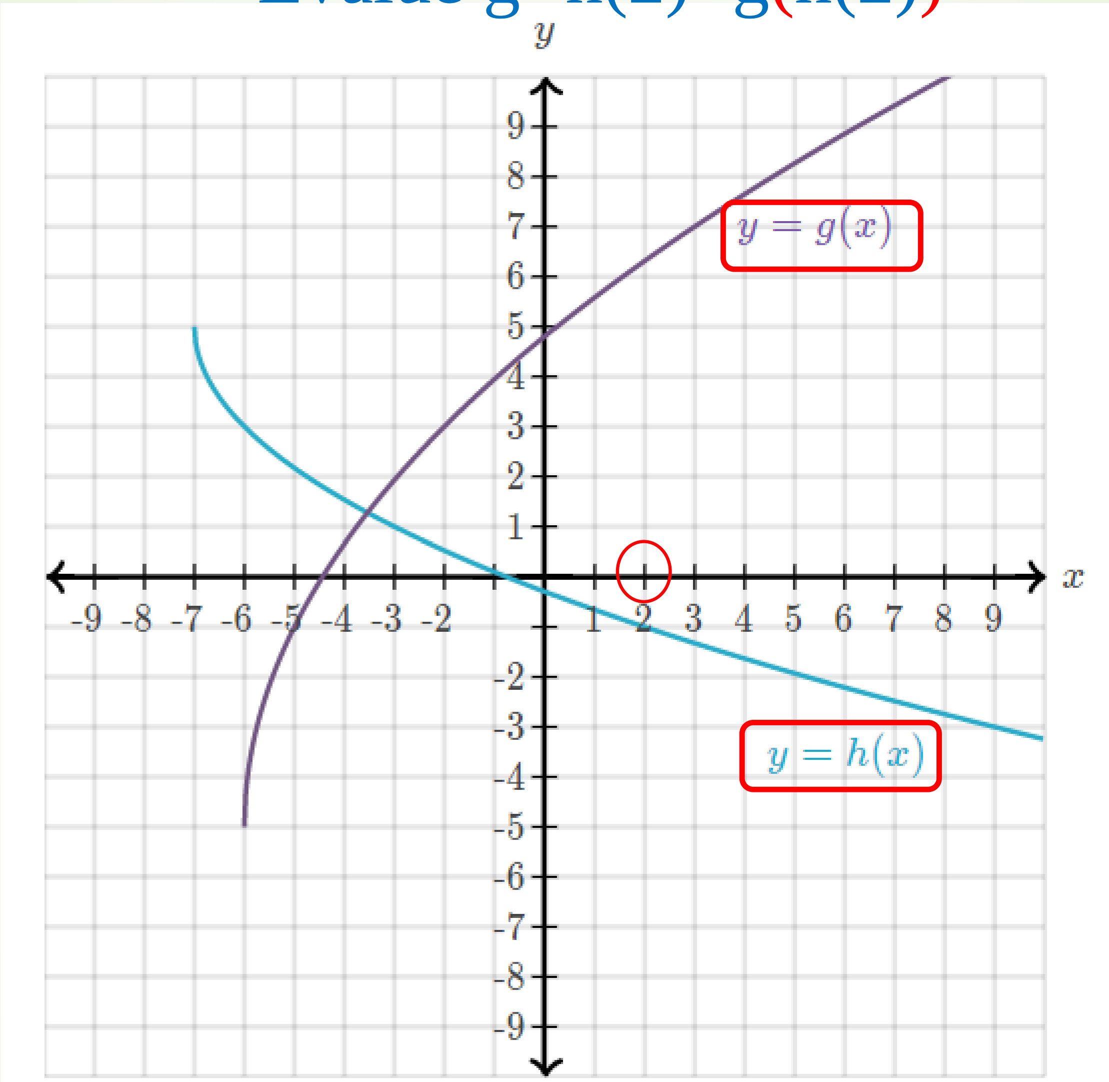
¿Cuál de las siguientes expresiones indica la cantidad de dinero que Ben puede esperar ganar, si él siembra papas en a acres de terreno?

Escoge 1 respuesta:

- $0.2a - 200$
- $5000a - 400$
- $(25{,}000a - 1000)(0.2p - 200)$

Evaluación de funciones compuestas en gráficos.

Evalúe g○h(2)=g(h(2))



4/3/2018

https://es.khanacademy.org/math/algebra2/manipulating-functions/function-composition/e/evaluate-composite-functions-from-graphs-and-tables

¿Cuál de las siguientes aproxima mejor el valor de $g(h(2))$?

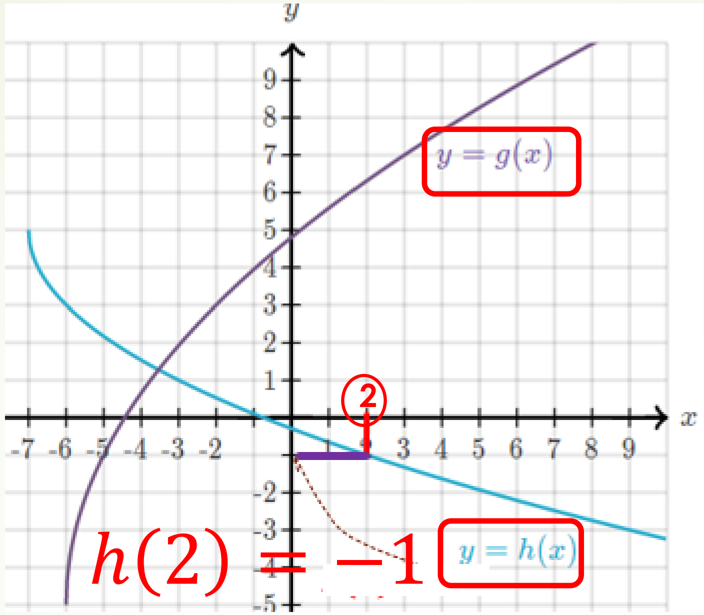
Escoge 1 respuesta:

- -2
- -1
- 4
- 6

Ver diapositivas siguientes

https://es.khanacademy.org/math/algebra2/manipulating-functions/function-composition/e/evaluate-composite-functions-from-graphs-and-tables

$g(h(2))$



1 / 4 Cuando evaluamos funciones compuestas, trabajamos de adentro hacia afuera.

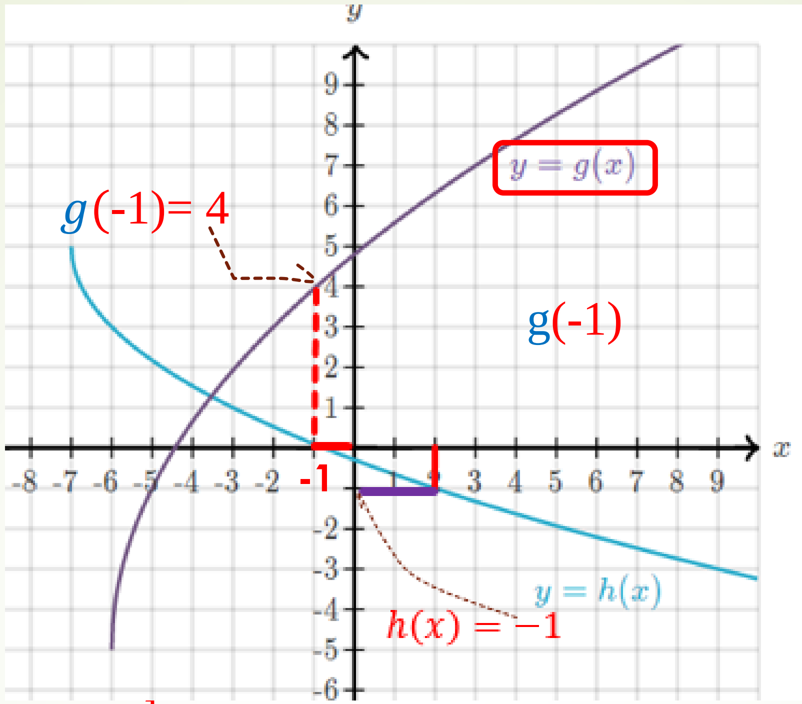
Para evaluar $g(h(2))$ primero evaluamos $h(2)$ Después introducimos ese resultado en g para encontrar nuestra respuesta.

2 / 4 Evaluemos $h(2)$.

$h(2) = -1$, pues el valor de la función h para $x = 2$ es -1.

https://es.khanacademy.org/math/algebra2/manipulating-functions/function-composition/e/evaluate-composite-functions-from-graphs-and-tables

$h(2) = -1$



-1

3 / 4 Ahora sabemos que $g(h(2))$ es lo mismo que $g(-1)$, pues $h(2) = -1$.

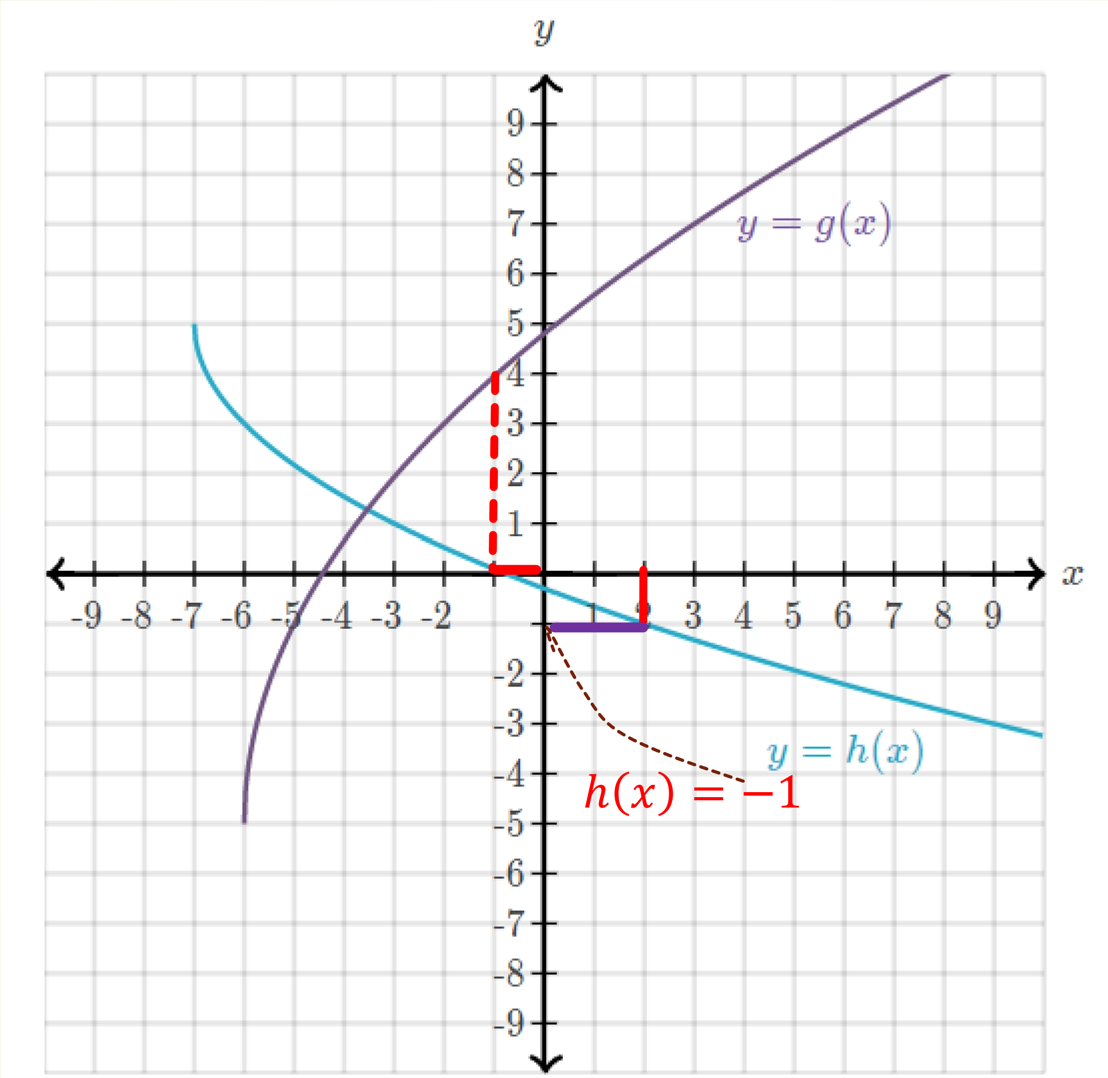
Evaluemos $g(-1)$. -1 se convierte en valor de entrada o sea en x para la nueva función

$g(-1) = 4$, pues el valor de la función g para $x = -1$ es 4.

4 / 4 La respuesta:

$g(h(2)) = 4$ Ver gráfico

https://es.khanacademy.org/math/algebra2/manipulating-functions/function-composition/e/evaluate-composite-functions-from-graphs-and-tables


y
x
$y = g(x)$
$y = h(x)$
$h(x) = -1$

Continuidad de una función compuesta

9 Teorema Si g es continua en $x = a$ y f es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ es continua en $x = a$.

A menudo, este teorema se expresa de manera informal diciendo: "una función continua de una función continua es una función continua".

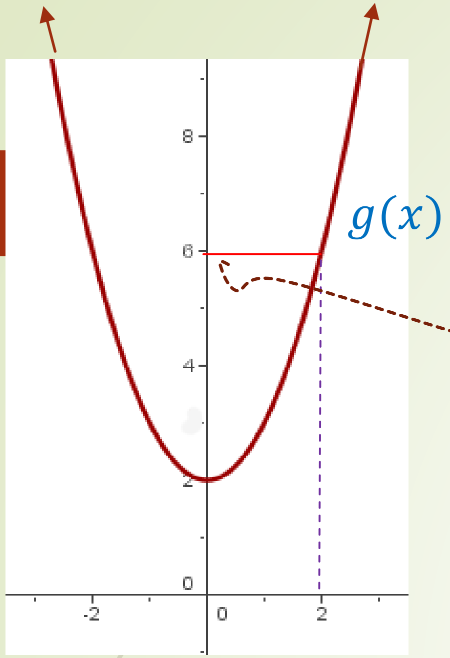
Continuidad de una función compuesta en un punto x= a.

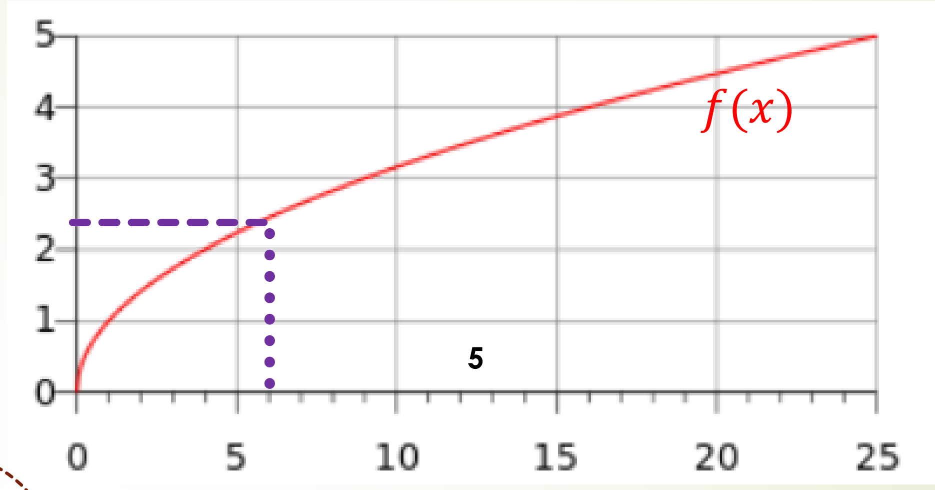
Si se tiene una función continua $g(x)$, y se evalúa en un punto x= a, se tiene obviamente $g(a)$. Esto da un cierto número por ejemplo b.

Si se averigua la continuidad de otra función $f\ (x)$ en $x = b$, y se ve que es continua, entonces la función compuesta $f \circ g$ también será continua en el punto x=a.

$$\underline{(f \circ g)\ (x)} = f[g(x)]$$

También será continua en el punto x=a.





$g(x) = x^2 + 2$ es continua en 2,

$g(2) = (\quad)^2 + 2 = 2^2 + 2 = 6.$

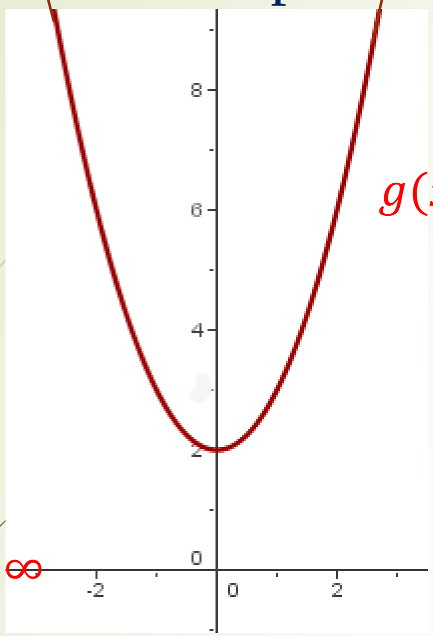
Si al evaluar la continuidad de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 6$, se ve que también es continua,

entonces, $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \sqrt{(\quad)} = \sqrt{x^2 + 2}$ debe de ser continua en el punto $x=2$

Continuidad de Funciones Compuestas en un Intervalo

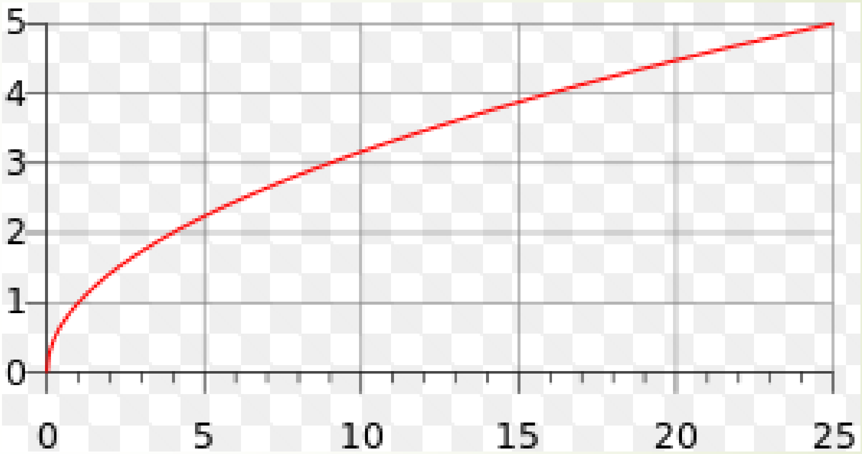
Si el teorema anterior se aplica no solo a un punto sino a un intervalo o a todos los puntos de la función $f(x)\ y\ \ g(x)$ y cumple, la función compuesta también será continua en el intervalo o en toda ella.

$g(x)$ en continua en todos los reales, al evaluar $f(x)$ con $g(x)$ que es continua en solo los números positivos, la función $f \circ g$ será continua en todos los reales.



$g(x) = x^2 + 2$

$-\infty$ ∞



∞

$g(x) = x^2 + 2$ es continua sobre $(-\infty, \infty)$.

$f(x) = \sqrt{x}$ es continua sobre el intervalo $[0, \infty)$

$(f \circ g)(x) = \sqrt{(\quad)} = \sqrt{x^2+2}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 2}$ es continua en todas partes.

Límites de funciones compuestas

8 Teorema Si f es continua en b, y $\lim_{x \to a} g(x) = b$, entonces $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$.

En otras palabras,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\Big(\underbrace{\lim_{x \to a} g(x)}_{}\Big) = f(L) \qquad \left(\text{Si } \lim_{x \to a} g(x) = L\right)$$

L

El teorema establece que si una función f es continua, entonces el límite de la función $f \circ g$, es la función f evaluada con el límite de la segunda función g. Para hallar el límite de una función compuesta, basta hallar el límite de la segunda función y se evalúa con este valor la primera función.

Note que:

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

Otra forma del límite de una Función Compuesta

TEOREMA 1.5 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Si f y g son funciones tales que $\lim_{x \to c} g(x) = L$ y $\lim_{x \to L} f(x) = f(L)$, entonces:

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(L).$$

$g(x) = x^2 + 4$ $\qquad f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow f(4) = \sqrt{4} = 2$

$\lim_{x \to 0}(f \circ g)(x) = \lim_{x \to 0} f((g(x)) = f(\overline{\lim_{x \to 0} g(x)})$ *si* $\lim_{x \to 0} g(x) = 4$

entonces $\qquad f(4) = 2$

$$g(x) = (2x^2 - 10) \qquad f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$$

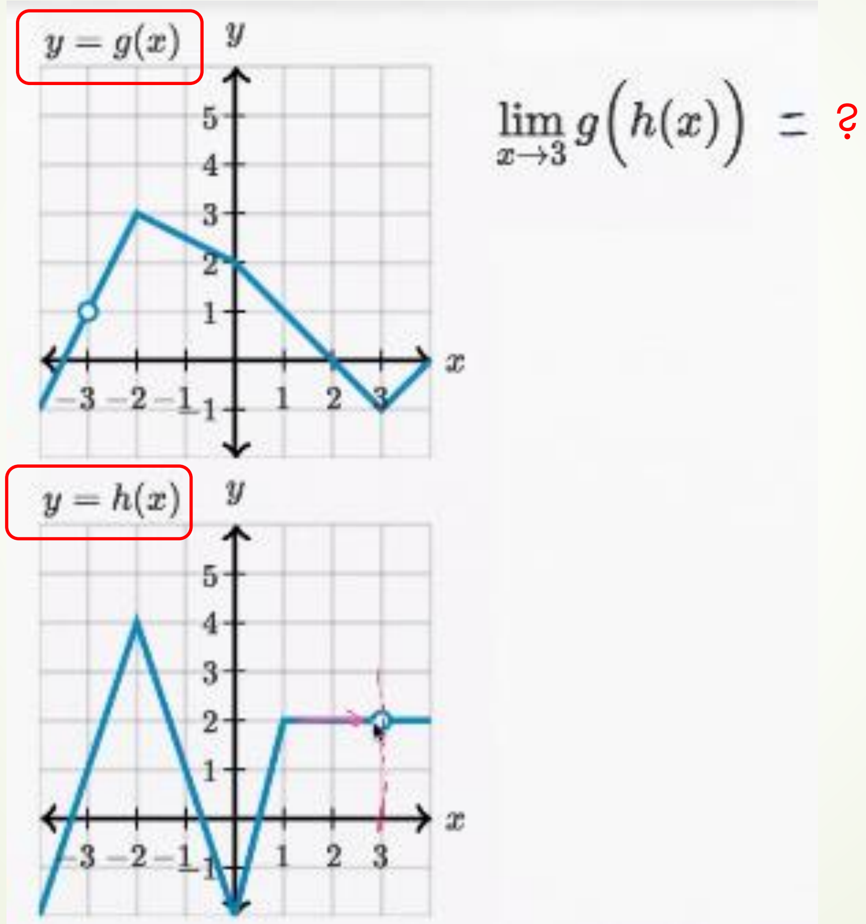
$$\lim_{x\to3}(f \circ g)(x) = \lim_{x\to3} f((g(x)) = f(\lim_{x\to3} g(x)) \; si$$

$$\lim_{x\to3} g(x)) = \lim_{x\to3}(2x^2 - 10) = 2 * 3^2 - 10 = 18 - 10 = 8$$

Por tanto $$f(\lim_{x\to3} g(x)) = f(8) = 2$$

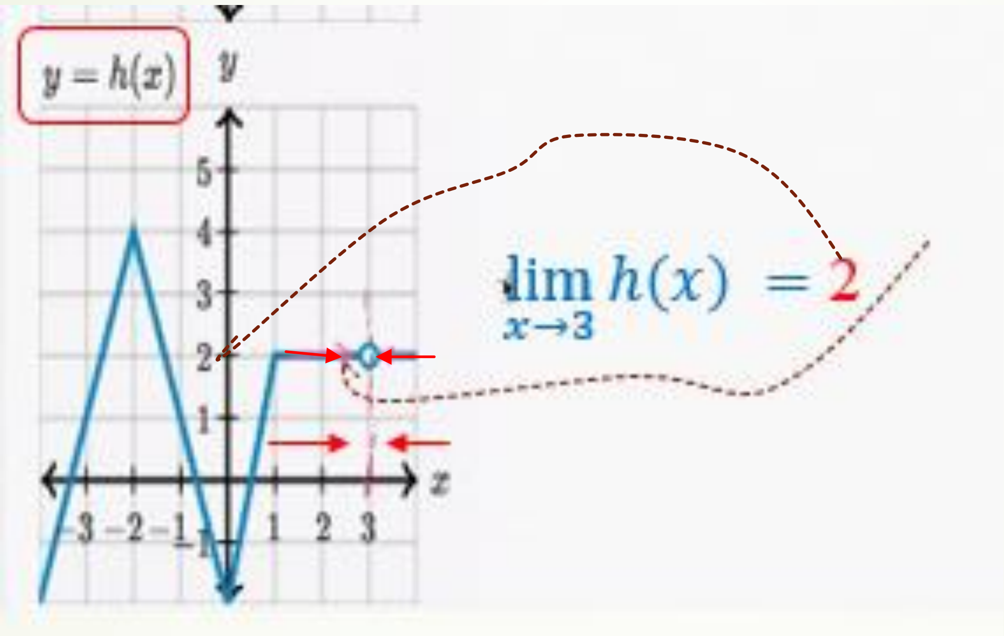
Hallar límites de funciones compuestas a partir de gráficos de las funciones originales

$$\lim_{x\to 3}(g \circ h)(x) = \lim_{x\to 3} g(\,(hx)) = g\left(\lim_{x\to 3} h(x)\right)$$



$$\lim_{x\to 3}(g \circ h)(x) = \lim_{x\to 3} g(h(x)) = g(\lim_{x\to 3} h(x))$$

1. Averiguo en la gráfica cuánto vale $\lim_{x\to 3} h(x)$



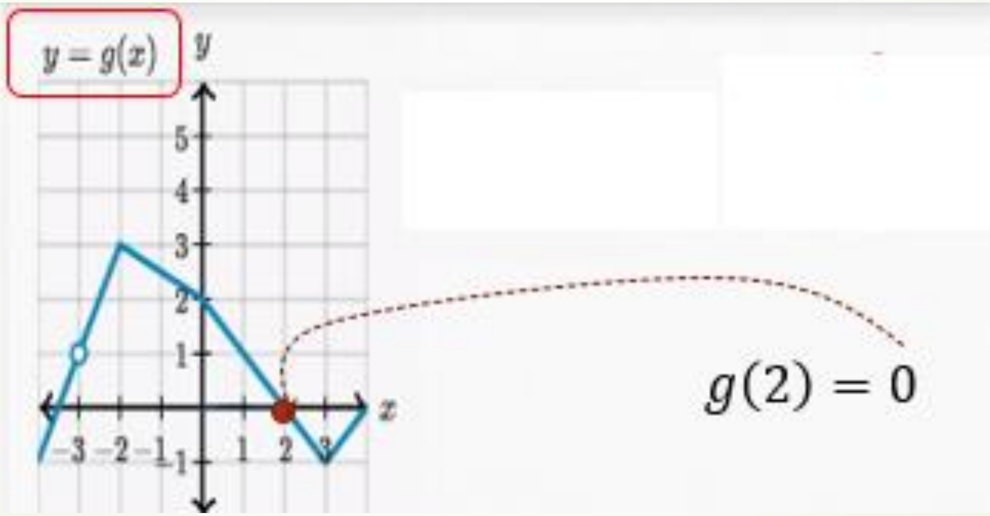
$$\lim_{x\to 3} h(x) = 2$$

$$\overset{2}{\overline{g(\lim_{x\to 3} h(x))}}$$

Reemplazo en $g(\lim_{x\to 3} h(x))$ el valor de $\lim_{x\to 3} h(x) = 2$

Obtengo $g(2)$

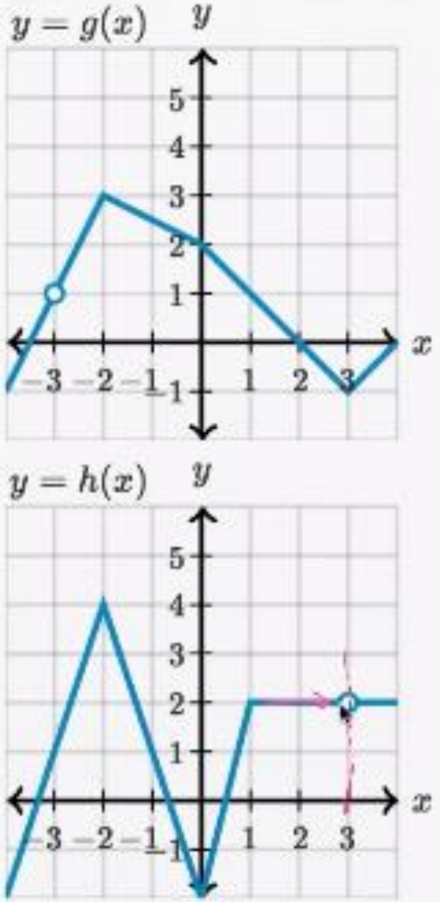
Ahora voy a la gráfica de $g(x)$ y con el dato de entrada (en x) igual a 2
Averiguo cuánto vale $g(2)$, *observo que es* 0. Este es el valor del límite pedido.



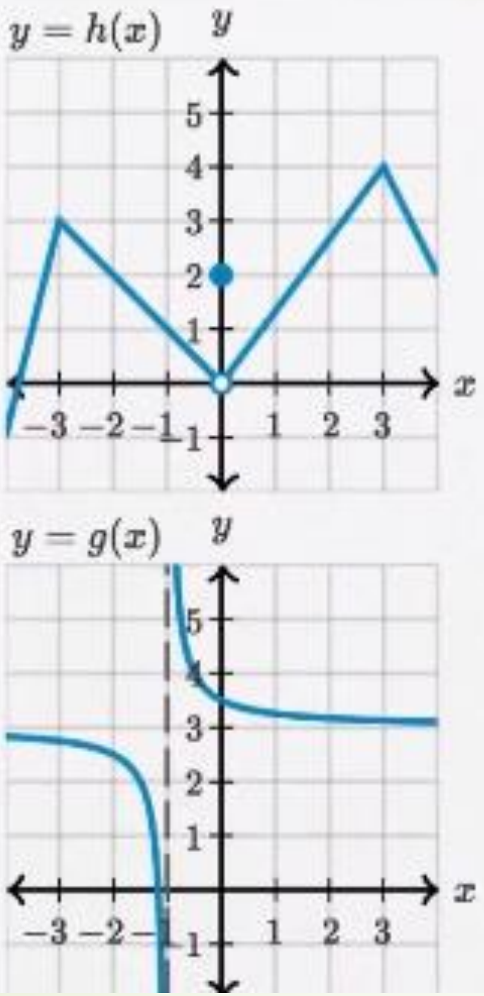
Resumiendo

$$\lim_{x\to 3}(g \circ h)(x) = \lim_{x\to 3} g\big(h(x)\big) = g(\lim_{x\to 3} h(x)) = g(2) = 0$$

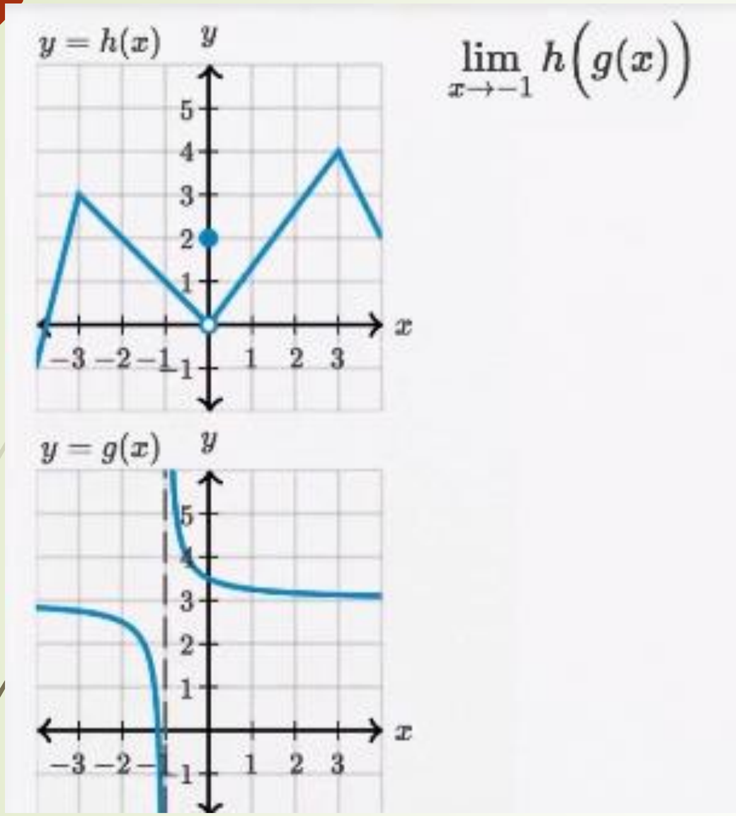
Hallar con las mismas gráficas cuánto vale el $\lim_{x \to 2} (h \circ g)(x) = ?$

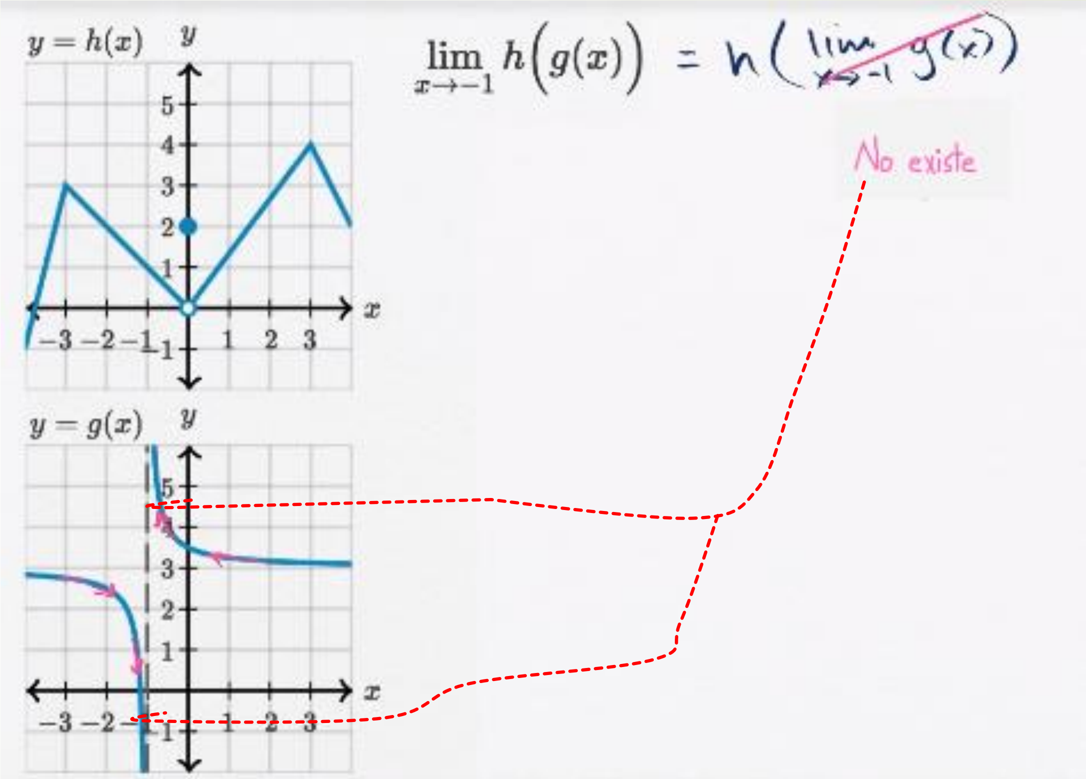


$\lim_{x \to 3} g\left(h(x)\right) =$

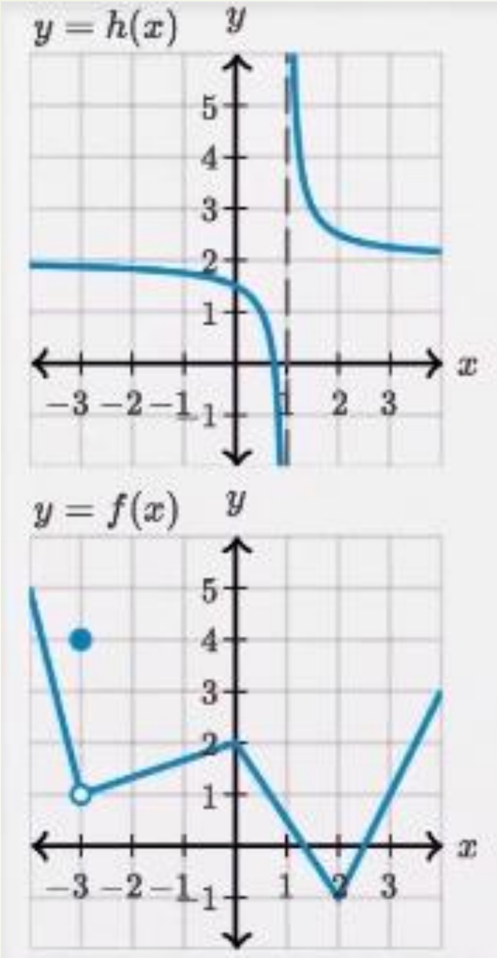


$$\lim_{x \to -1} h\Big(g(x)\Big) = ?$$





https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-limits-continuity/ab-basic-limit-rules/v/limits-of-composite-functions



$$\lim_{x \to -3} h\Big(f(x)\Big)$$