- **Límites infinitos**
- **Asíntotas**
- **Elaboró Profesor Efrén Giraldo T.**

❖MIS VALORES
Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

❖MI VISIÓN: Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖MI MISIÓN: Entrega a la Voluntad Suprema.
Servir a las personas.

Límites infinitos

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Límites infinitos El límite de una función f no existe cuando x tiende a un número a siempre que los valores de la función crecen o decrecen sin límite. El hecho de que los valores de la función $f(x)$ crecen sin límite cuando x tiende a a se expresa simbólicamente por

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty. \qquad (1)$$

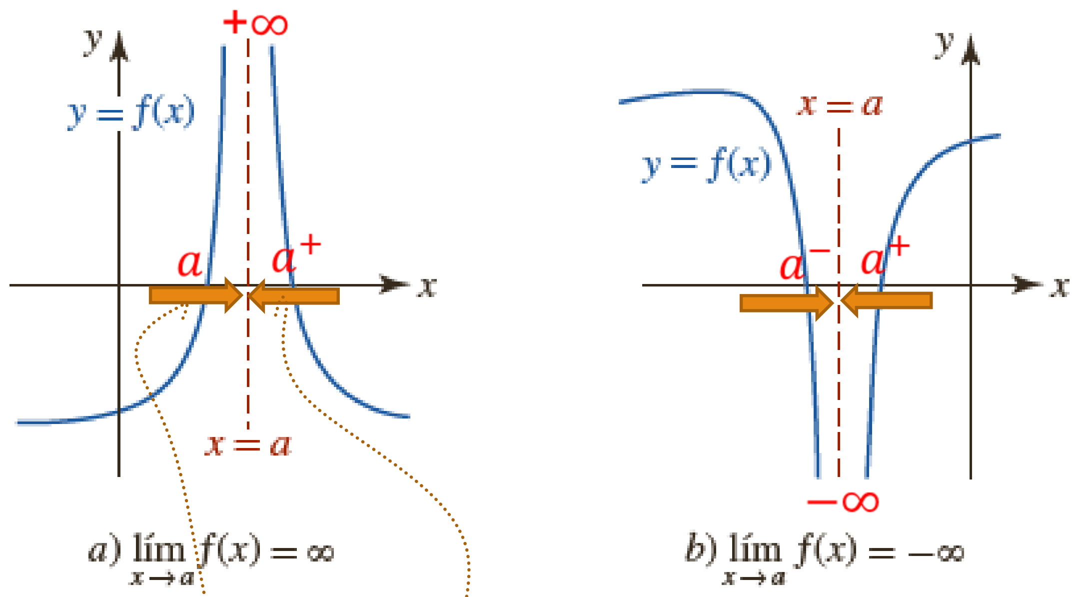
no existe

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty. \qquad (2)$$

no existe

$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$



Dos tipos de límites infinitos

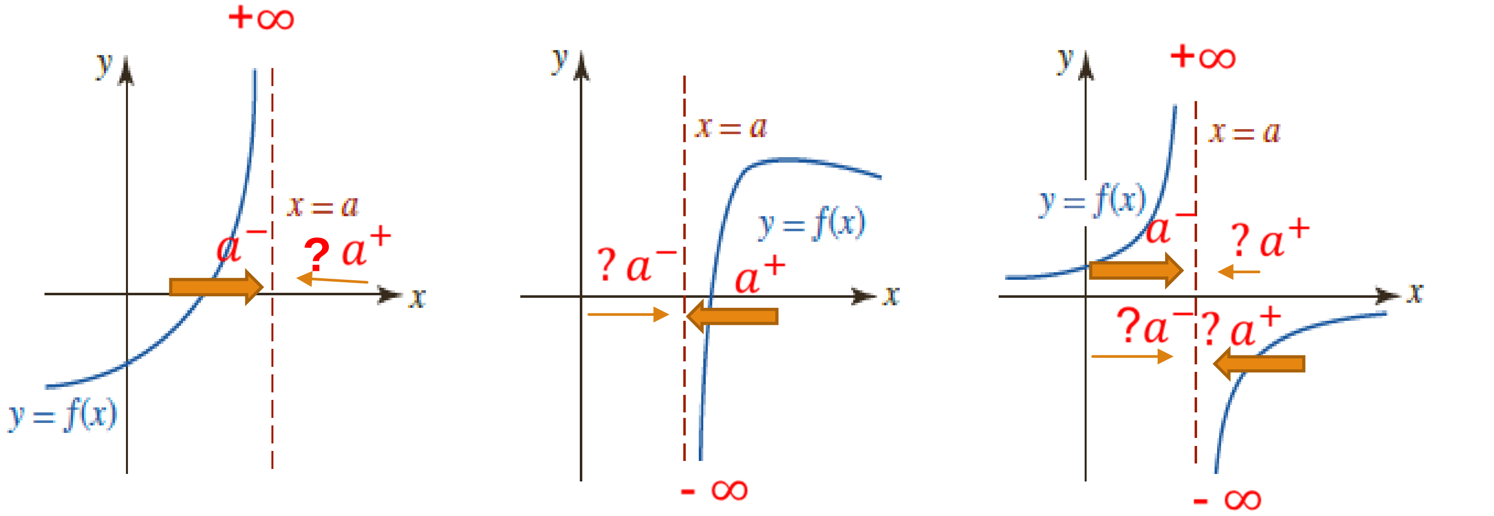
$\lim_{x \to a^-} f(x) = -$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = -$

Recuerde que el uso del símbolo $x \to a$ significa que f muestra el mismo comportamiento —en este caso, sin límite— a ambos lados del número a sobre el eje x. Por ejemplo, la notación en (1) indica que

$$f(x) \to \infty \text{ cuando } x \to a^- \qquad y \qquad f(x) \to \infty \text{ cuando } x \to a^+.$$

En forma semejante, la FIGURA 2.5.2 muestra el comportamiento sin límite de una función f cuando x tiende a a por un lado. Observe en la figura 2.5.2*c*) que no es posible describir el comportamiento de f cerca de a usando un solo símbolo de límite.



a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ *b*) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ *c*) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

FIGURA 2.5.2 Tres tipos más de límites infinitos

Pero aunque no existan límites por ambos lados, se consideran como límites infinitos, por tanto son otros casos de límites infinitos.

Seis tipos de límites infinitos

En general, cualquier límite de los seis tipos

$$
\begin{array}{ll}
1.\ \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty, & 4.\ \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty, \\
2.\ \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty, & 5.\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty, \\
3.\ \lim_{x\to a} f(x) = -\infty, & 6.\ \lim_{x\to a} f(x) = \infty,
\end{array}
\qquad (3)
$$

se denomina **límite infinito**. De nuevo, en cada caso de (3) simplemente se está describiendo de manera simbólica el comportamiento de una función f cerca del número a. *Ninguno de los límites en* (3) *existe*.

1. $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty,$
2. $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty,$
3. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty,$
4. $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty,$
5. $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty,$
6. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$

(3)

Definición 2.5.1 Asíntota vertical

Se dice que una recta $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de una función f si por lo menos una de las seis afirmaciones en (3) es verdadera.

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2} = \frac{x}{(1-x)(1+x)}$$

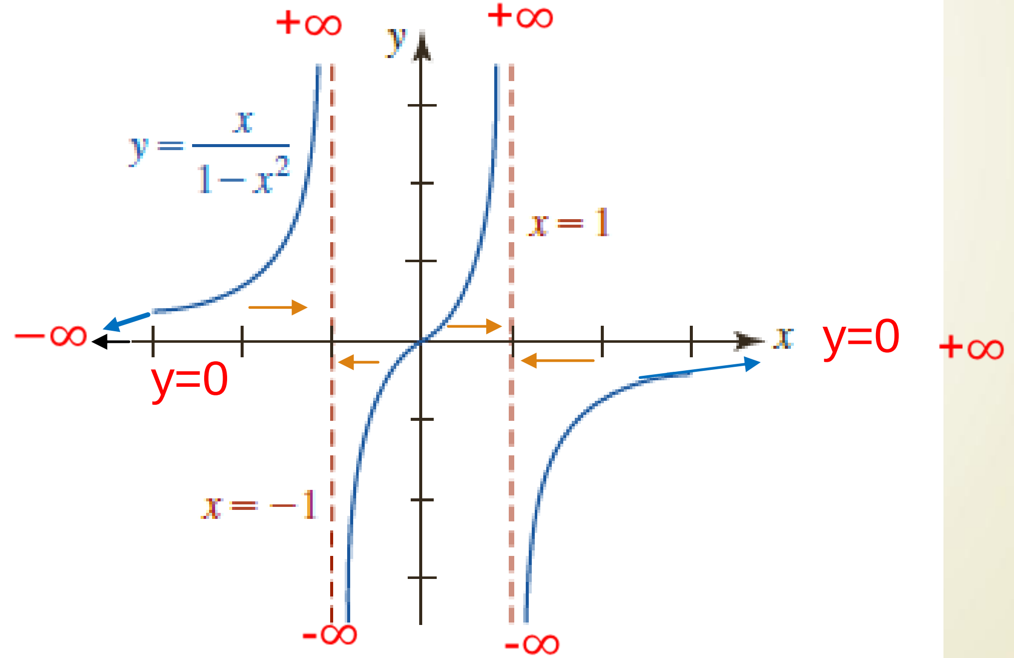


FIGURA 1.3.17 Gráfica de la función en el ejemplo 6*a*)

. Así, las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales. Puesto que el grado del numerador x es 1 y el grado del denominador $1 - x^2$ es 2 (y $1 < 2$), se concluye que $y = 0$ es una asíntota horizontal para la gráfica de f. La gráfica consta de tres *ramas* distintas: una a la izquierda de la recta $x = -1$, una entre las rectas $x = -1$ y $x = 1$ y una a la derecha de la recta $x = 1$. Vea la FIGURA 1.3.17.

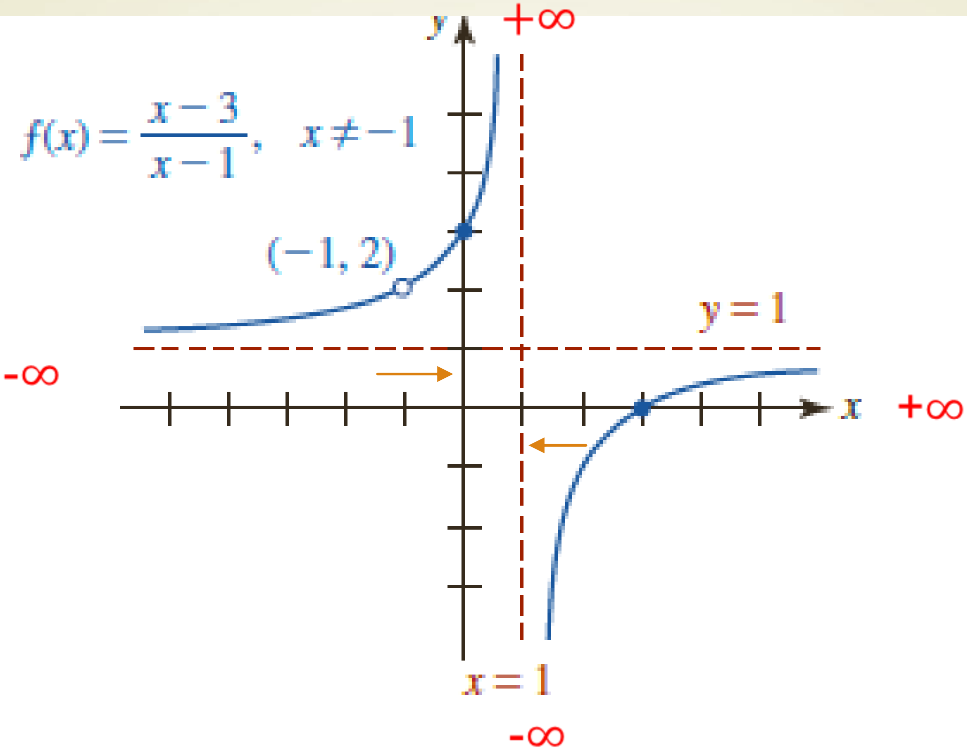
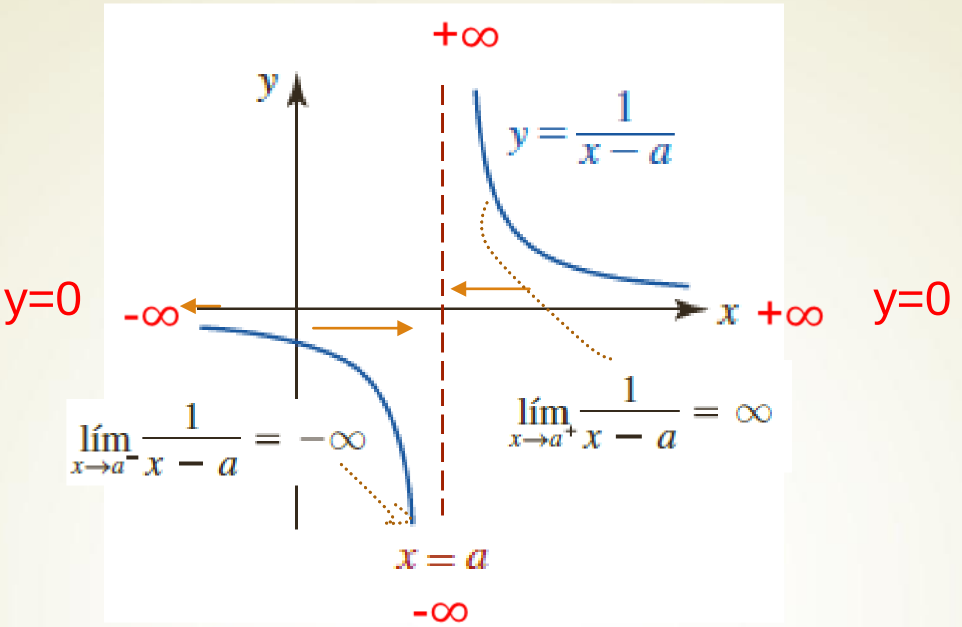
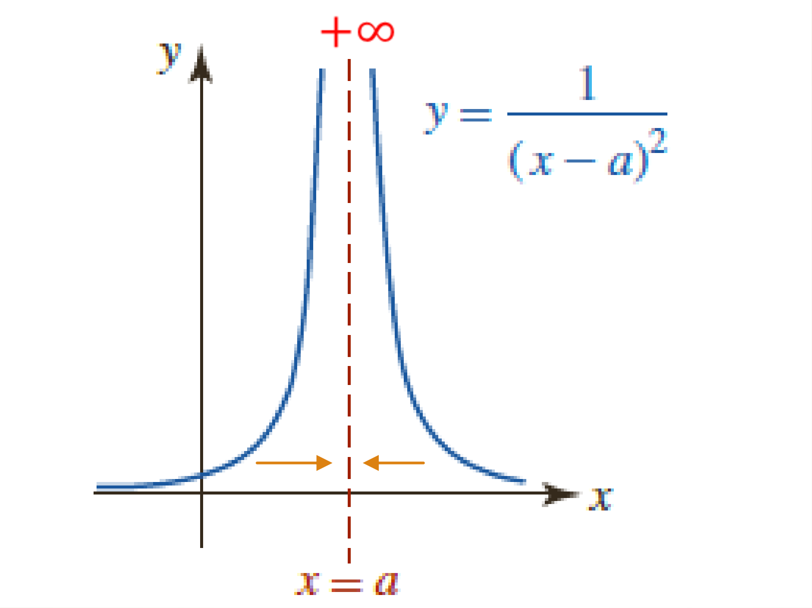


FIGURA 1.3.19 Gráfica de la función en el ejemplo 7

una asíntota vertical es $x = 1$ y una asíntota horizontal es $y = 1$.

Note que el punto P(-1,2) no pertenece a la función.


+∞
$y = \frac{1}{x-a}$
y=0
-∞
x
+∞
y=0
$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$
$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{x-a} = \infty$
$x = a$
-∞



$+\infty$
y
$y = \dfrac{1}{(x-a)^2}$
x
$x = a$

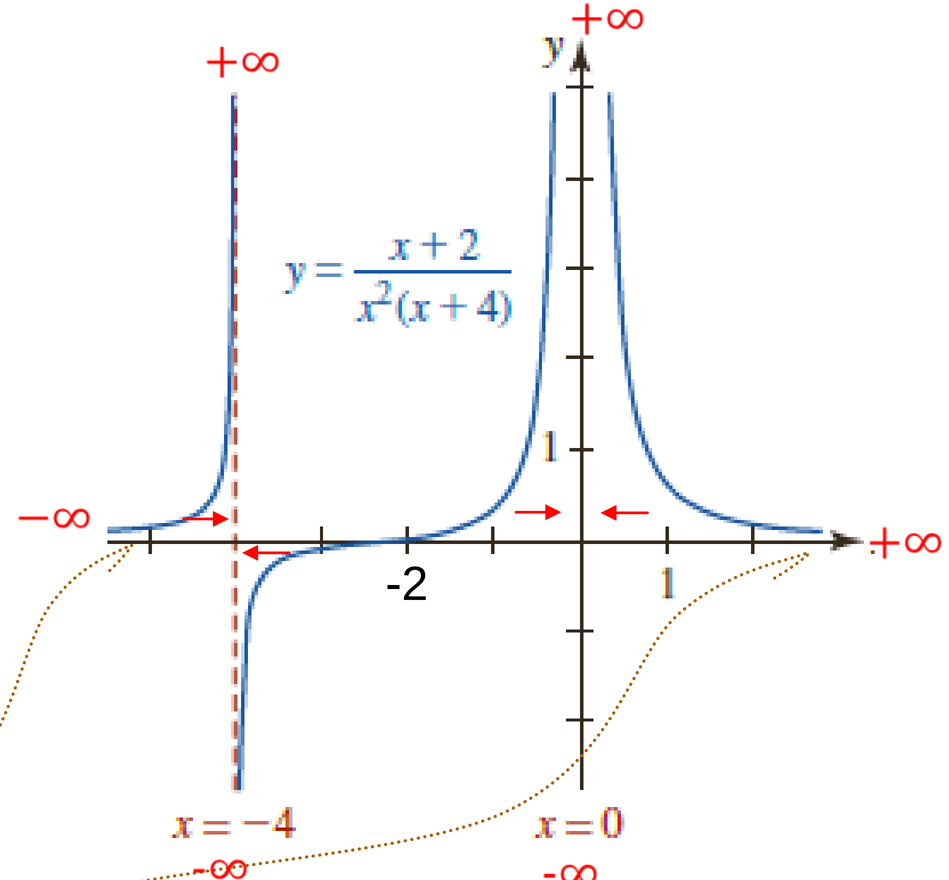


FIGURA 2.5.4 Gráfica de la función

se observa que $x = -4$ y $x = 0$ son asíntotas verticales para la gráfica de f.

y=0 es asíntota horizontal. ¿Habrá asíntota en -2?

EJEMPLO Límite por un lado

Grafique la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$.

Solución Al inspeccionar f se observa que su dominio es el intervalo $(-2, \infty)$ y la intersección con el eje y es $(0, 0)$. A partir de la tabla siguiente se concluye que f decrece

$x \to -2^+$	-1.9	-1.99	-1.999	-1.9999
$f(x)$	-6.01	-19.90	-63.21	-199.90

sin límite cuando x tiende a -2 por la derecha:

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty.$$

Por tanto, la recta $x = -2$ es una asíntota vertical. La gráfica de f se proporciona en la FIGURA 2.5.5. ■

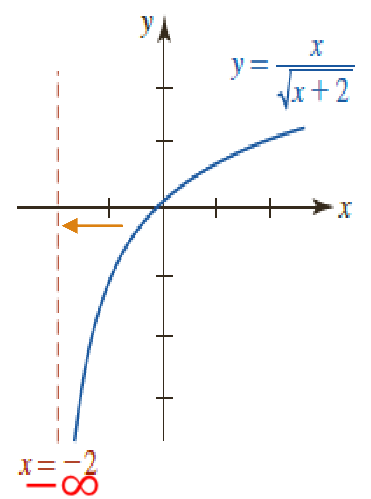


FIGURA 2.5.5 Gráfica de la función en el ejemplo 3

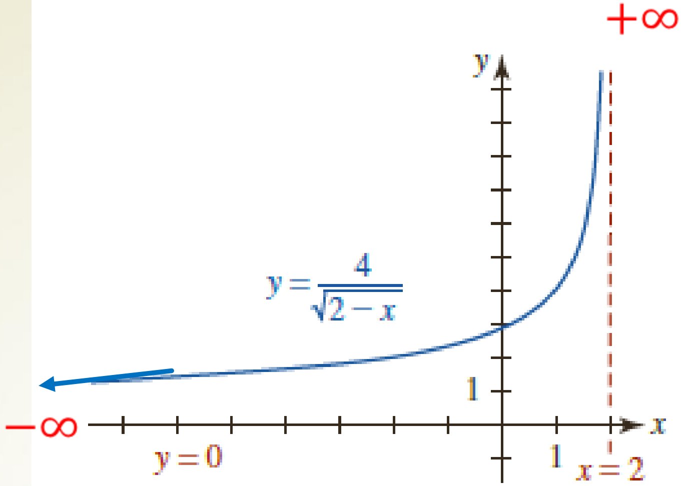


FIGURA 2.5.7 Gráfica de la fun ción

EJEMPLO Asíntotas horizontal y vertical

El dominio de la función $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{2-x}}$ es el intervalo $(-\infty, 2)$. En virtud de (11) puede escribirse

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4}{\sqrt{2-x}} = 0.$$

Observe que no es posible considerar el límite de f cuando $x \to \infty$ porque la función no está definida para $x \geq 2$. No obstante, $y = 0$ es una asíntota horizontal. Luego, por el límite en infinito

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{4}{\sqrt{2-x}} = \infty$$

se concluye que $x = 2$ es una asíntota vertical para la gráfica de f. Vea la FIGURA 2.5.7. ■

Asíntotas verticales

No hay restricciones en cuanto al número de asíntotas verticales que puede tener una función: hay funciones que no tienen asíntotas verticales, funciones que tienen sólo una, funciones que tienen dos y hasta funciones que tienen infinitas. Se calculan de la siguiente forma:

Si $\lim_{x \to k^-} f(x) = \pm\infty$, entonces $x = k$ es asíntota vertical para $f(x)$ (por la izquierda de la misma si el límite ha dado $-\infty$ y por la derecha si el límite ha dado $+\infty$).
Si $\lim_{x \to k^+} f(x) = \pm\infty$, entonces $x = k$ es asíntota vertical para $f(x)$ (por la izquierda de la misma si el límite ha dado $-\infty$ y por la derecha si el límite ha dado $+\infty$).

https://www.gaussianos.com/calcular-las-asintotas-de-una-funcion/

En las verticales **nosotros tenemos que aportar los valores de k para los cuales calcular los límites**. Evidentemente debemos aportar puntos para los cuales sea *factible* la existencia de la asíntota vertical (no es demasiado aconsejable probar con valores al azar)

https://www.gaussianos.com/calcular-las-asintotas-de-una-funcion/

Valores posible de asíntotas verticales

Los valores *candidatos* a existencia de asíntota vertical son los siguientes:

1. **Valores que anulan algún denominador de la función**

Por ejemplo, para $f(x) = \frac{x}{x-1}$ tenemos un candidato a asíntota vertical en el punto $x = 1$.

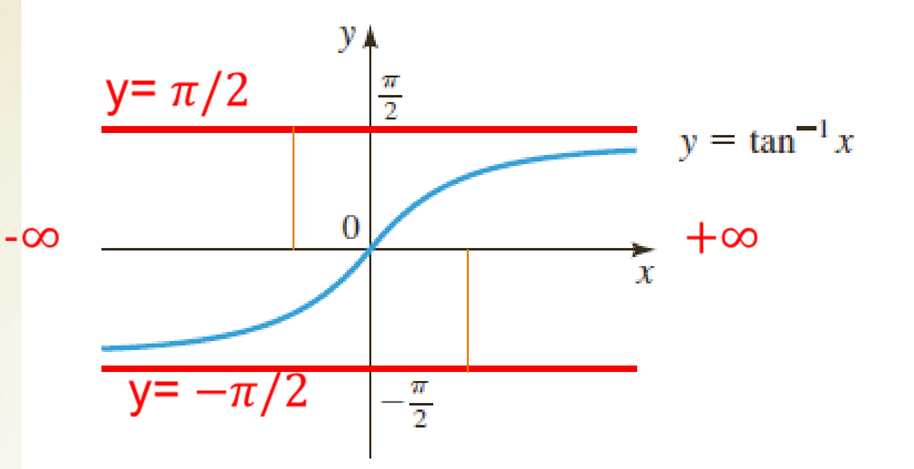
2. **Extremos de intervalos del dominio que no pertenezcan al propio dominio**

Por ejemplo, el dominio de $f(x) = x\,ln(x)$ es el intervalo $(0, +\infty)$. Por tanto, $x = 0$ es un candidato a asíntota vertical para esta función.

https://www.gaussianos.com/calcular-las-asintotas-de-una-funcion/

En consecuencia, lo primero que debemos hacer cuando tengamos que calcular las asíntotas de una función es calcular su dominio (fundamental para cualquier cálculo relacionado con la gráfica de una función) e igualar a cero todos los denominadores que aparezcan en la misma para recopilar todos los candidatos.

https://www.gaussianos.com/calcular-las-asintotas-de-una-funcion/

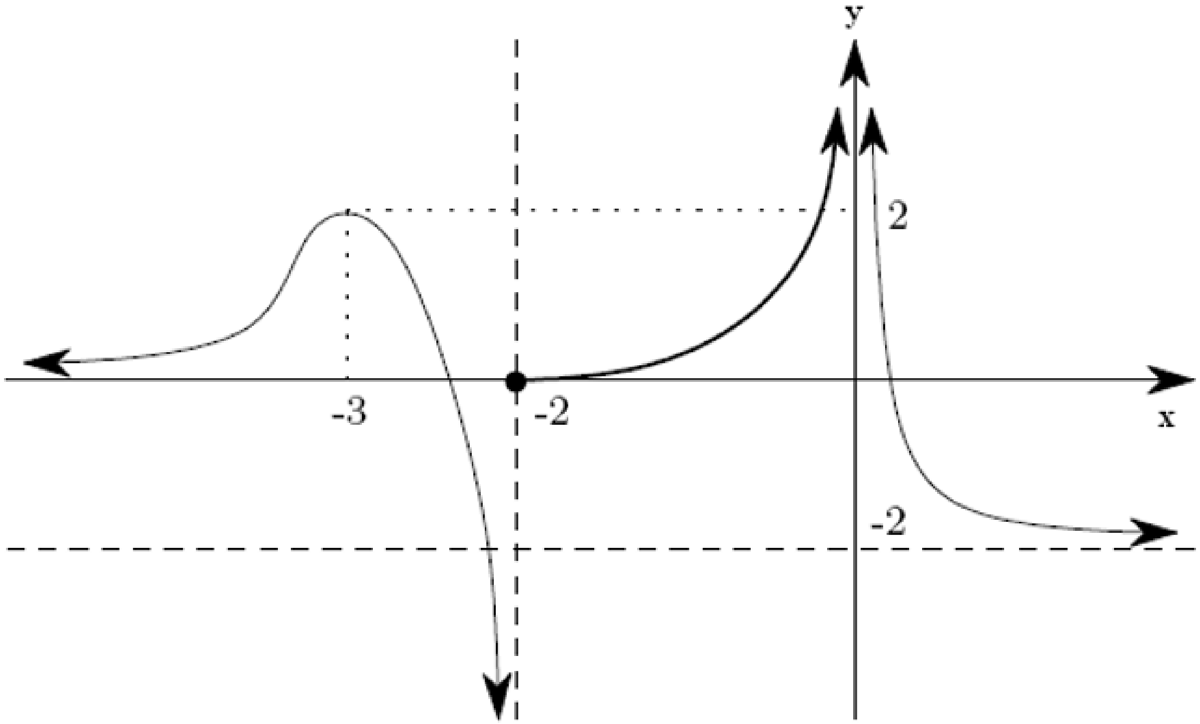


un ejemplo de una curva con dos asíntotas horizontales es $y = \tan^{-1}x$

$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1}x = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \infty} \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

de modo que las dos rectas $y = -\pi/2$ y $y = \pi/2$ son asíntotas horizontales.

De la gráfica de la función *f*, halle en caso exista, los siguientes límites:



$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \to -3} f(x)$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

EJEMPLO 7 Gráfica de una función racional

la función $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$.

Solución Al inspeccionar la función f se observa que su gráfica es simétrica con respecto al eje y, la intersección con el eje y es (0, 0) y las asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 1$. Luego, a partir del límite

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1 - x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -\lim_{x\to\infty} 1 = -1$$

se concluye que la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal. La gráfica de f se muestra en la FIGURA 2.5.8. ■

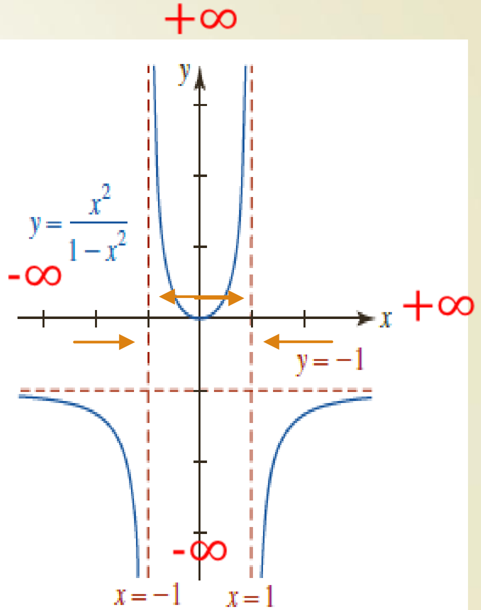
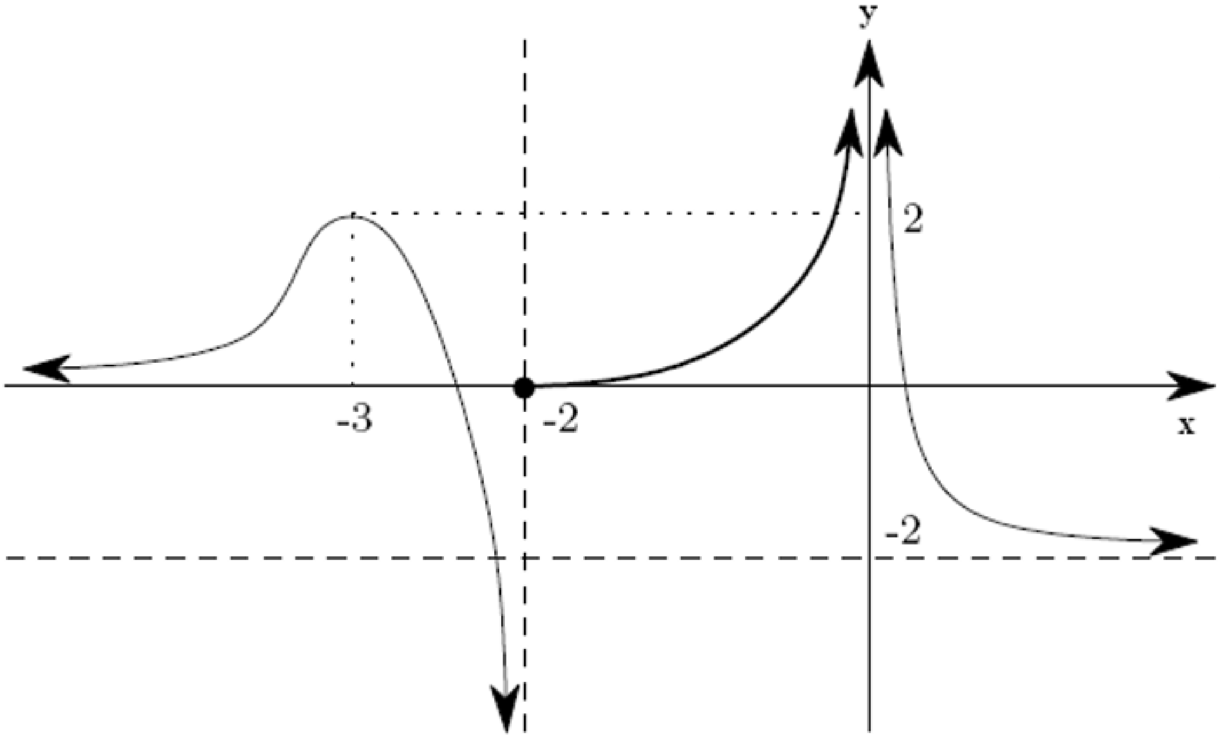


FIGURA 2.5.8 Gráfica de la función en el ejemplo 7

¿La recta y=0 será asíntota en x=0?

A partir de la gráfica . . . , ¿en qué valor de ***a***, se cumple:



$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Un límite que no existe

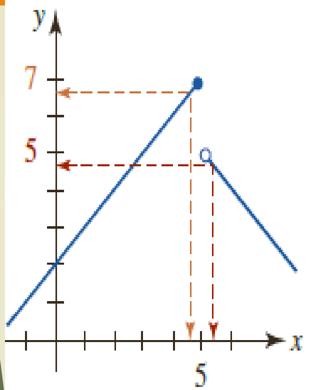


FIGURA 2.1.6 Gráfica de la función en el ejemplo 3

EJEMPLO 3 Un límite que no existe

La gráfica de la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 5 \\ -x + 10, & x > 5 \end{cases}$$

se muestra en la FIGURA 2.1.6. A partir de la gráfica y de las tablas acompañantes, parece que cuando x se hace próxima a 5 a través de números menores que 5, $\lim_{x \to 5^-} f(x) = 7$. Luego, cuando x tiende a 5 a través de números mayores que 5 parece que $\lim_{x \to 5^+} f(x) = 5$. Pero puesto que

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) \neq \lim_{x \to 5^+} f(x),$$

se concluye que $\lim_{x \to 5} f(x)$ no existe.

$x \to 5^-$	4.9	4.99	4.999
$f(x)$	6.90000	6.99000	6.99900

$x \to 5^+$	5.1	5.01	5.001
$f(x)$	4.90000	4.99000	4.99900

Un límite que si existe

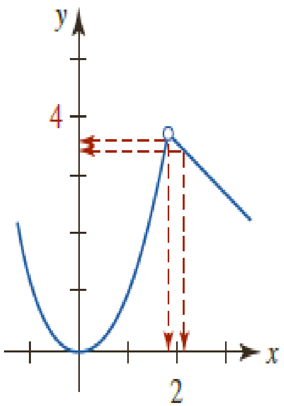


FIGURA 2.1.5 Gráfica de la función en el ejemplo 2

EJEMPLO Un límite que existe

La gráfica de la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ -x + 6, & x > 2 \end{cases}$$

se muestra en la FIGURA 2.1.5. Observe que $f(2)$ no está definido, aunque esto no tiene ninguna consecuencia cuando se considera $\lim_{x\to 2} f(x)$. A partir de la gráfica y de las tablas acompañantes,

$x \to 2^-$	1.9	1.99	1.999
$f(x)$	3.61000	3.96010	3.99600

$x \to 2^+$	2.1	2.01	2.001
$f(x)$	3.90000	3.99000	3.99900

observamos que cuando x se hace próxima a 2, $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próxima a 4, y así

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 4.$$

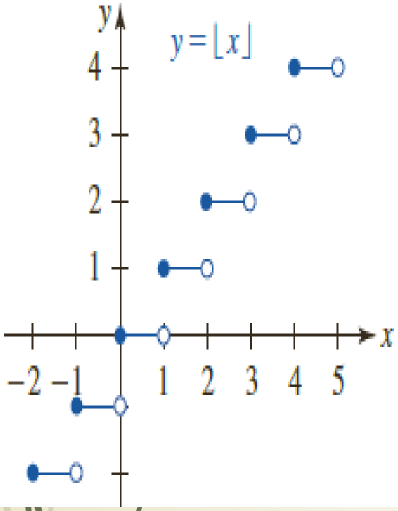
Es decir, $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$. ■

Aunque la función no exista en un punto determinado su límite puede existir si tiende a un valor dado por debajo y por encima.

Un límite que no existe

EJEMPLO 4 Un límite que no existe

La función entero mayor se analizó en la sección 1.1.



Recuerde que la **función entero mayor** o **parte entera** $f(x) = \lfloor x \rfloor$ se define como el mayor entero que es menor o igual que x. El dominio de f es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$. A partir de la gráfica en la FIGURA 2.1.7 vemos que $f(n)$ está definida para todo entero n; a pesar de ello, para cada entero n, $\lim_{x \to n} f(x)$ no existe. Por ejemplo, cuando x tiende, por ejemplo, al número 3, los dos límites laterales existen pero sus valores son diferentes:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2 \qquad \text{mientras que} \qquad \lim_{x \to 3^+} f(x) = 3. \tag{8}$$

En general, para un entero n,

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = n - 1 \qquad \text{mientras que} \qquad \lim_{x \to n^+} f(x) = n.$$

Un límite que no existe

FIGURA 2.1.7 Gráfica de la función en el ejemplo 4

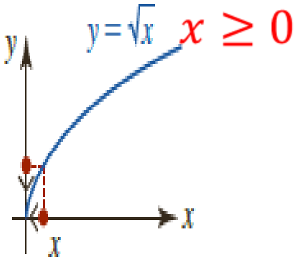


FIGURA 2.1.8 Gráfica de la función en el ejemplo 5

EJEMPLO 5 Un límite por la derecha

A partir de la FIGURA 2.1.8 debe resultar evidente que $f(x) = \sqrt{x} \to 0$ cuando $x \to 0^+$, es decir,

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

Sería incorrecto escribir $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ puesto que esta notación implica la connotación de que los límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales a 0. En este caso $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x}$ no existe puesto que $f(x) = \sqrt{x}$ $\boxed{\text{no está definida para } x < 0.}$ ■

La x no puede acercarse a 0 por la izquierda

Si k es un entero positivo, entonces

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

30

Asíntotas oblicuas

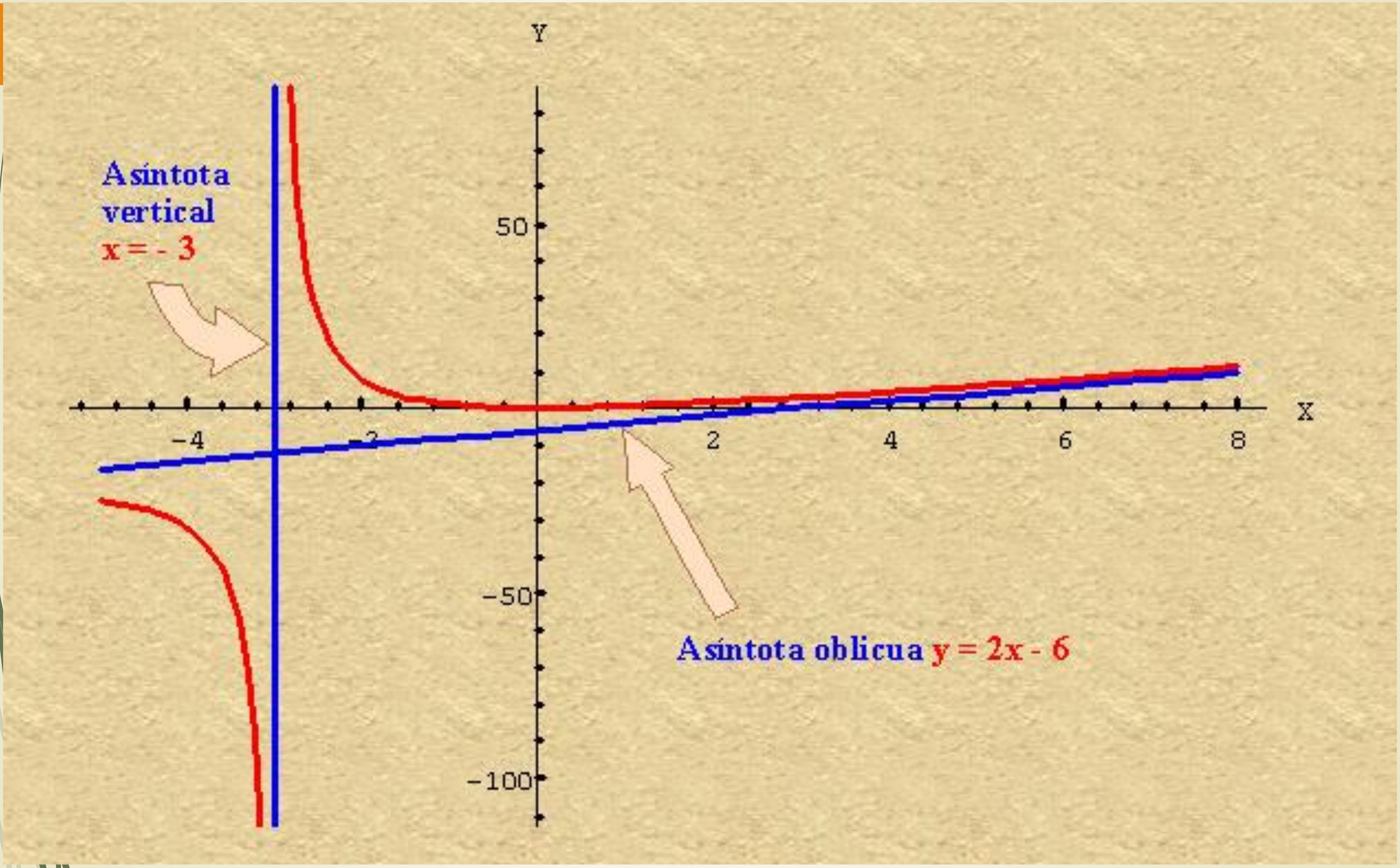
Asíntotas oblicuas

Las **asíntotas oblicuas** de una función son rectas oblicuas, es decir, rectas de la forma $y = mx + n$. Una función puede tener, como máximo, dos asíntotas oblicuas distintas (una por la izquierda de su gráfica y otra por la derecha de la misma). El cálculo de las mismas se realiza así:

Condición para que una función tenga asíntotas oblicuas

Un buen artificio para saber de antemano si tenemos una asíntota oblicua es observar si se trata de una fracción. Para que haya asíntota oblicua se tiene que cumplir que <u>el grado del numerador sea exactamente un grado mayor que el del denominador</u>.

Sólo hallaremos las asíntotas oblicuas cuando no haya asíntotas horizontales.



Y
Asíntota
vertical
x = - 3
50
−4
−2
2
4
6
8
X
−50
−100
Asíntota oblicua y = 2x - 6

Asíntotas oblicuas (inclinadas)

Si existen los límites: :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-m\cdot x\right]=n$$

La recta "y = mx+n" es la asíntota oblicua.

m es la pendiente de la recta oblicua,
n es el intercepto sobre el eje y.

Ejemplo:

$$f(x)=\frac{2x^2}{x+3} \quad , \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x+3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+3x}=2=m$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x+3}-2x\right)=-6=n \quad , \quad y=2x-6$$ es la asíntota oblicua.

$$y = 2x - 6$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x+3}-2x\right)=-6$$

Pasos

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x+3}-2x\right)$$

$$\frac{2x^2}{x+3}-2x=-\frac{6x}{x+3}$$

$$\frac{2x^2}{x+3}-2x$$

Convertir a fracción: $2x=\frac{2x}{1}$

$$=\frac{2x^2}{x+3}-\frac{2x}{1}$$

https://es.symbolab.com/solver/limit-calculator/%5Clim_%7Bx%5Cto%5Cinfty%7D%5Cleft(%5Cfrac%7B2x%5E%7B2%7D%7D%7Bx%2B3%7D-2x%5Cright)

$$= \frac{2x^2}{x+3} - \frac{2x(x+3)}{x+3}$$

Ya que los denominadores son iguales, combinar las fracciones: $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$

$$= \frac{2x^2 - 2x(x+3)}{x+3}$$

Expandir $2x^2 - 2x(x+3)$: $\quad -6x$

$$= \frac{-6x}{x+3}$$

Aplicar las propiedades de las fracciones: $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$

$$= -\frac{6x}{x+3}$$

https://es.symbolab.com/solver/limit-calculator/%5Clim_%7Bx%5Cto%5Cinfty%7D%5Cleft(%5Cfrac%7B2x%5E%7B2%7D%7D%7Bx%2B3%7D-2x%5Cright)

Dividir entre el denominador con mayor potencia: $\frac{1}{1+\frac{3}{x}}$

$$= -6 \cdot \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{3}{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

With the exception of indeterminate form

$$= -6 \cdot \frac{\lim_{x\to\infty}(1)}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)}$$

https://es.symbolab.com/solver/limit-calculator/%5Clim_%7Bx%5Cto%5Cinfty%7D%5Cleft(%5Cfrac%7B2x%5E%7B2%7D%7D%7Bx%2B3%7D-2x%5Cright)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1\right)=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)=1$$

$$=-6\cdot\frac{1}{1}$$

Simplificar

$$=-6$$

https://es.symbolab.com/solver/limit-calculator/%5Clim_%7Bx%5Cto%5Cinfty%7D%5Cleft(%5Cfrac%7B2x%5E%7B2%7D%7D%7Bx%2B3%7D-2x%5Cright)

Asíntotas oblicuas

Cálculo de la ecuación de la recta de la asíntota oblicua

$y = mx + n \Rightarrow m \neq 0$

Debemos calcular la pendiente m y la ordenada en el origen n

1. Pendiente : $m = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right]$

2. Intercepto : $n = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - mx \right]$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

Calculamos su ecuación :

Pendiente :

$$m = \lim_{x \to \infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x(x-1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} = 1$$

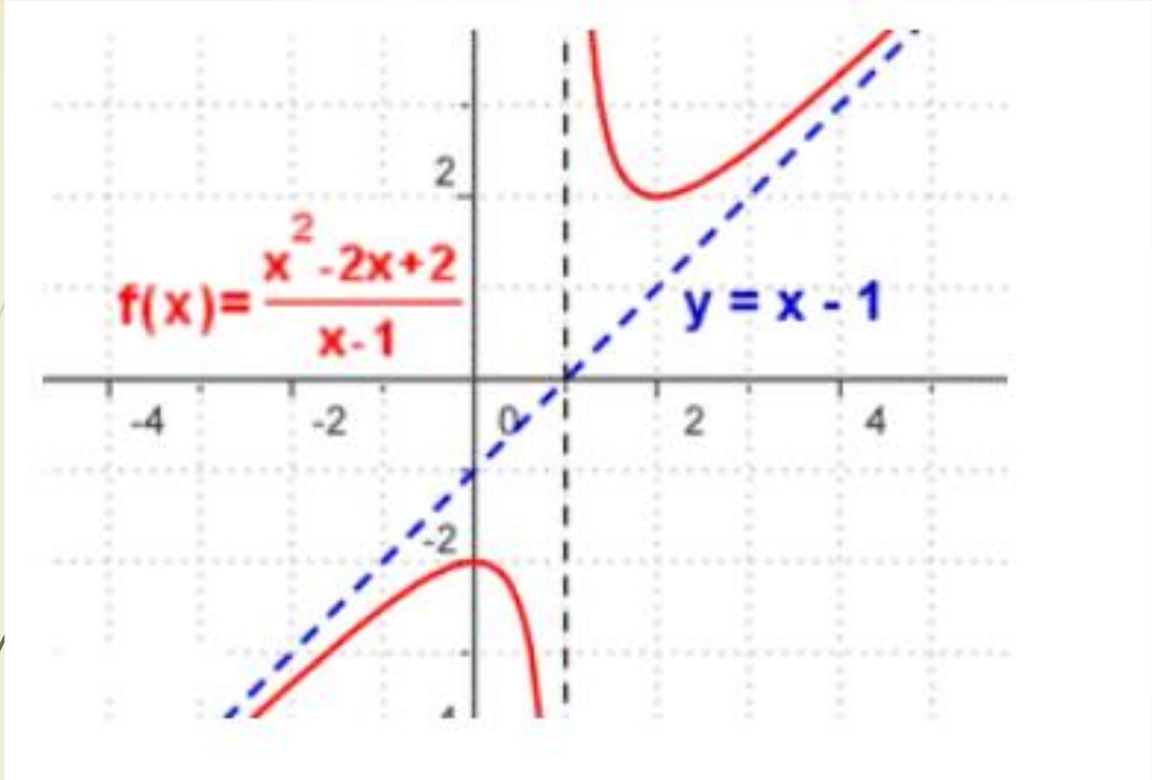
$$\frac{x^2}{x^2} = 1$$

Ordenada :

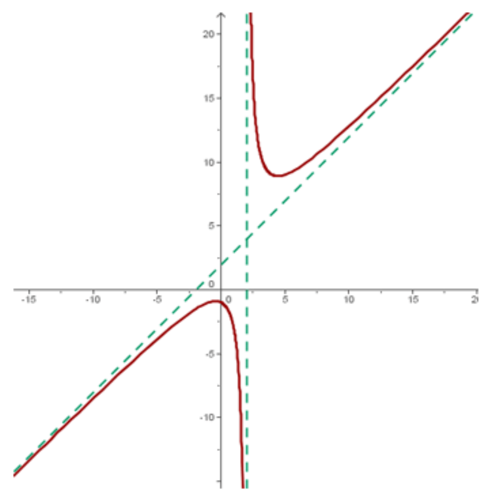
$x^2 - 2x + 2 - x(x-1) = x^2 - 2x + 2 - x^2 + x = -x + 2$

$$n = \lim_{x \to \infty}[f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-x + 2}{x - 1} = -1$$

Ecuación: $y = mx + n \Rightarrow y = x - 1$


2
-2
-4
0
2
4
$f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$
$y = x - 1$

$$f(x)=\frac{x^2+2}{x-2}$$



$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+2}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x^2-2x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x-2}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+2}{x-2}=2$$

$$y=x+2$$

https://www.vitutor.com/fun/5/c_6.html

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x-2}=\infty$$

No hay asíntotas horizontales

Asíntotas verticales

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2}{x-2}=\infty \qquad x=2$$

https://www.vitutor.com/fun/5/c_6.html