•Límites en el infinito:

$x \longrightarrow \infty$

•Asíntotas

•Profesor Efrén Giraldo

❖**MIS VALORES**

Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

❖**MI VISIÓN:** Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖**MI MISIÓN:** Entrega a la Voluntad Suprema.
Servir a las personas.

Límites en el infinito

….¿de dónde viene esto?...

- ¿Cuál es el valor de $\propto$?

No lo sabemos, pero sabemos que podemos acercarnos a él, haciendo cada vez valores mayores.

Lo mismo pasa con $\frac{1}{\propto}$.

Lo único que podemos decir es que ambos son indefinidos.

http://www.disfrutalasmatematicas.com/calculo/limites-infinito.html

El infinito es una idea muy especial. Sabemos que no podemos alcanzarlo, pero podemos calcular el valor de funciones.

podemos acercar a infinito $\propto$, haciendo que la x cada vez adquiera valores más y más grades y observando que pasa con la función.

http://www.disfrutalasmatematicas.com/calculo/limites-infinito.html

Podemos hacer el análisis:

- Gráficamente
- Tabulando
- Analíticamente

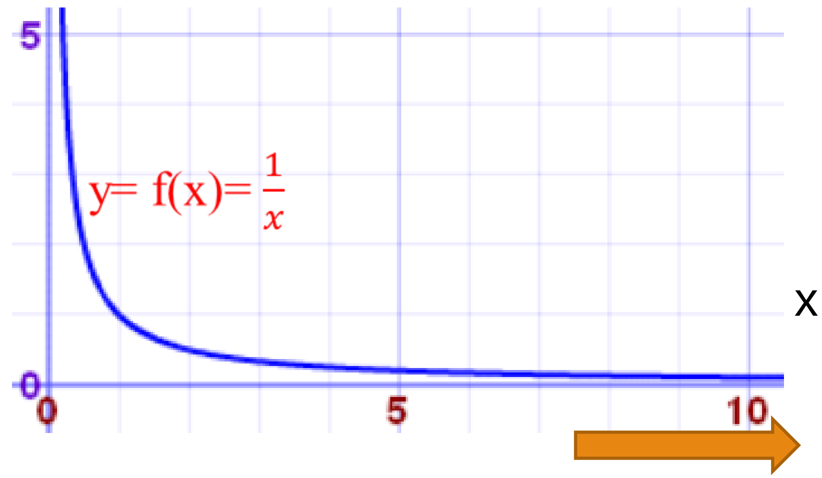
Sea la función:

Tabulando

x	1/x
1	1.00000
2	0.50000
4	0.25000
10	0.10000
100	0.01000
1,000	0.00100
10,000	0.00010

Vemos que cuando x crece, 1/x tiende a 0

Gráficamente



Así que en lugar de intentar calcular con infinito ∝ (porque no sacaremos ninguna respuesta razonable), probamos con valores de *x* más y más grandes.

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

http://www.disfrutalasmatematicas.com/calculo/limites-infinito.html

Analíticamente

Ahora tenemos una situación interesante:

No podemos decir qué le pasa a f(x) cuando x llega a infinito, pero podemos observar que la función $1/x$ va hacia cero, cuando x se vuelve muy grande :

$$\frac{1}{x} \text{ va hacia } 0$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{\infty} = 0 \qquad \frac{1}{x} \longrightarrow 0$$

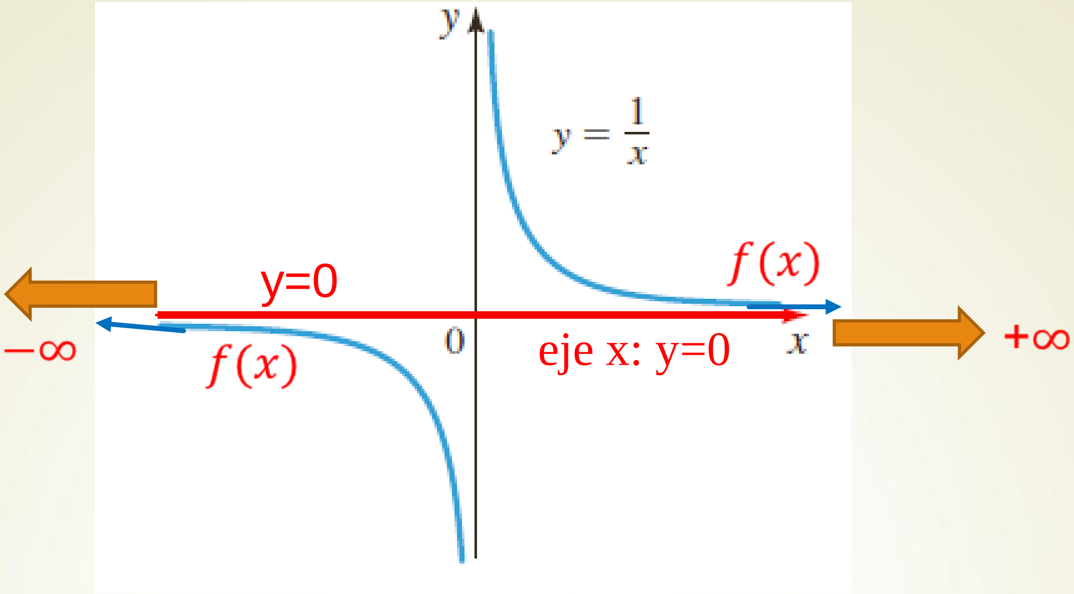
http://www.disfrutalasmatematicas.com/calculo/limites-infinito.html

Estaríamos tentados a decir que f(x) es igual a cero, pero la verdad es que no es realmente cierto, más vale decir que se aproxima a cero cuando x tiende a infinito (hacia valores cada vez más grandes); para evitar problemas los matemáticos lo expresan así:

$$\lim_{x \to \propto} \frac{1}{x} = 0$$

http://www.disfrutalasmatematicas.com/calculo/limites-infinito.html

10



EJEMPLO 1 | Límites en el infinito

Encuentre $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ y $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$.

SOLUCIÓN Observe que cuando x es grande, $1/x$ es pequeña. Por ejemplo,

$$\frac{1}{100} = 0.01 \qquad \frac{1}{10{,}000} = 0.0001 \qquad \frac{1}{1{,}000{,}000} = 0.000001$$

11

En realidad, al tomar x suficientemente grande, podemos hacer $1/x$ tan cercana a 0 como queramos. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Un razonamiento similar muestra que cuando x es negativa grande, $1/x$ es negativa pequeña, de modo que también tenemos

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Se deduce que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la curva $y = 1/x$. (Ésta es una hipérbola; vea Figura 5.)

Un problema práctico

Cierto productor sabe que el coste de fabricación de x unidades $C(x)$ de un determinado producto, viene dado (en euros) por la siguiente función:

$$C(x) = 3000 + 0.6x$$

Y también que el coste por unidad $c(x)$ (coste unitario) está dado por:

$$c(x) = \frac{3000 + 0.6x}{x}$$

El productor quiere saber si fabricando muchas unidades su costo unitario baja.

¿A cuánto ***tiende a llegar*** el coste unitario si el número de unidades fabricadas es ***cada vez mayor***?

A cuánto sale cada unidad, si por ejemplo se fabrican 200 unidades?. ¿Y si se fabricaran 2000?

O aún más…

Si x es igual a 200 unidades, se tendrá:

$$c(x) = \frac{3000 + 0.6 * 200}{200} = 15.6\ €$$

Si x es igual a 2000 unidades, se tendrá:

$$c(x) = \frac{3000 + 0.6 * 2000}{2000} = 2.1\ €$$

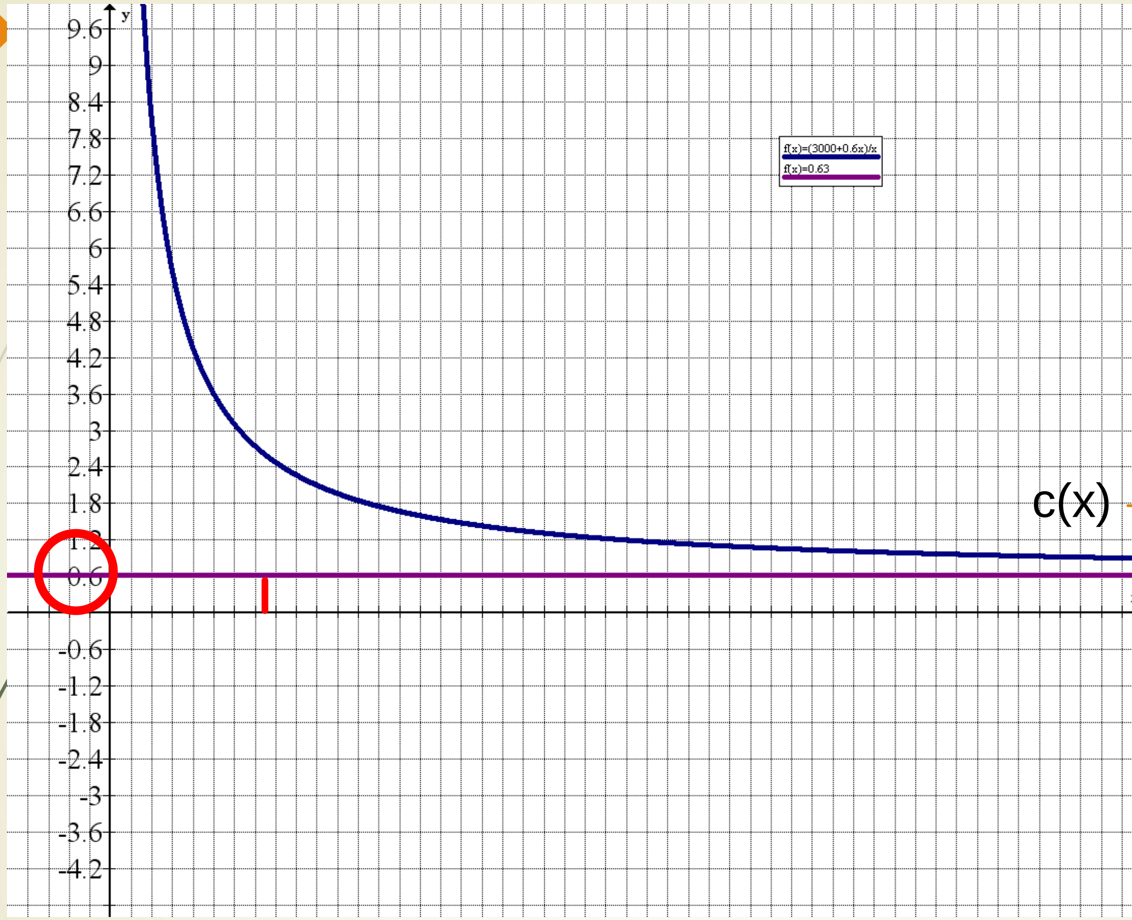
Para 10000 unidades:

$$c(x) = \frac{3000 + 0.6 * 10000}{10000} = 0.9\ €$$

Para 100000 $c(x) = 0.63\ €$
Para 1000000 $c(x) = 0.6003\ €$

Si x se hace muy grande parece ser que c(x) tiende a 0.6

$c(x)$



c(x) ⟶ 0   c(x) ⟶ y=0

$x \Rightarrow +\infty$

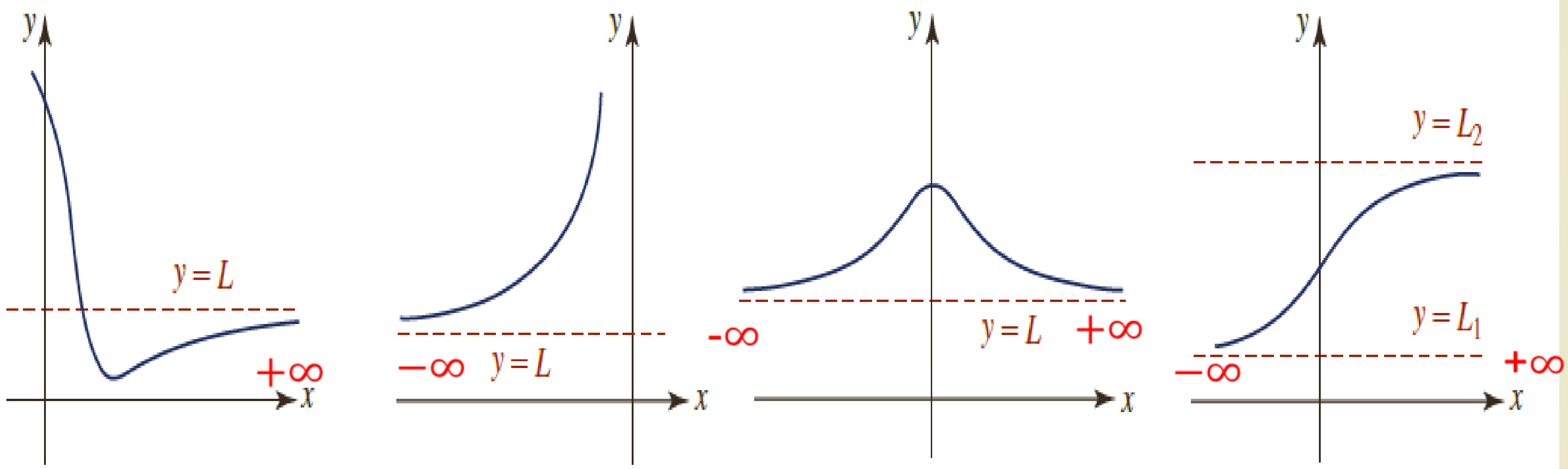
O sea, que se llega un punto en que el coste $c(x)$ unitario tiende a estabilizarse en 0.6. Esto es un límite en el infinito, que nos indica a qué valor se aproxima la función y cuando x crece indefinidamente. En este caso y se aproxima a 0.6 cuando $x \longrightarrow \propto$

Límites en el infinito

Casos que se pueden dar:

- Un límite existe pero el otro no.
- Tanto $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ como $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existen y son iguales al mismo número.
- Tanto $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ como $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existen pero son números diferentes.

Si por lo menos uno de los límites existe, por ejemplo, $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces la gráfica de f puede hacerse arbitrariamente próxima a la recta $y = L$ cuando x crece en la dirección positiva.



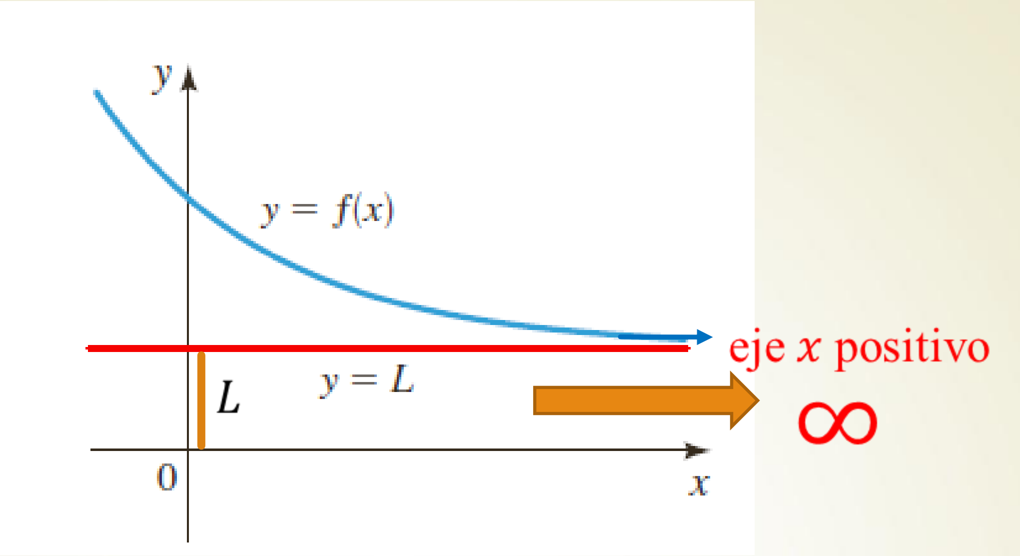
a) $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$

b) $f(x) \to L$ cuando $x \to -\infty$

c) $f(x) \to L$ cuando $x \to -\infty$,
$f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$

d) $f(x) \to L_1$ cuando $x \to -\infty$,
$f(x) \to L_2$ cuando $x \to \infty$

FIGURA 2.5.6 $y = L$ es una asíntota horizontal en *a*), *b*) y *c*); $y = L_1$ y $y = L_2$ son asíntotas horizontales en *d*)



La recta $y = L$ se **denomina asíntota** horizontal de la curva $y = f(x)$

LÍMITE EN EL INFINITO POSITIVO

Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\text{Si} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L si tomamos x grande lo suficiente.

ASÍNTOTA HORIZONTAL

La recta $y = L$ se **denomina asíntota** horizontal de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Límites en el infinito por la derecha y por la izquierda

Si los valores de la función $f\ (x)$ tienden a un número L cuando x aumenta indefinidamente, por la derecha, decimos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

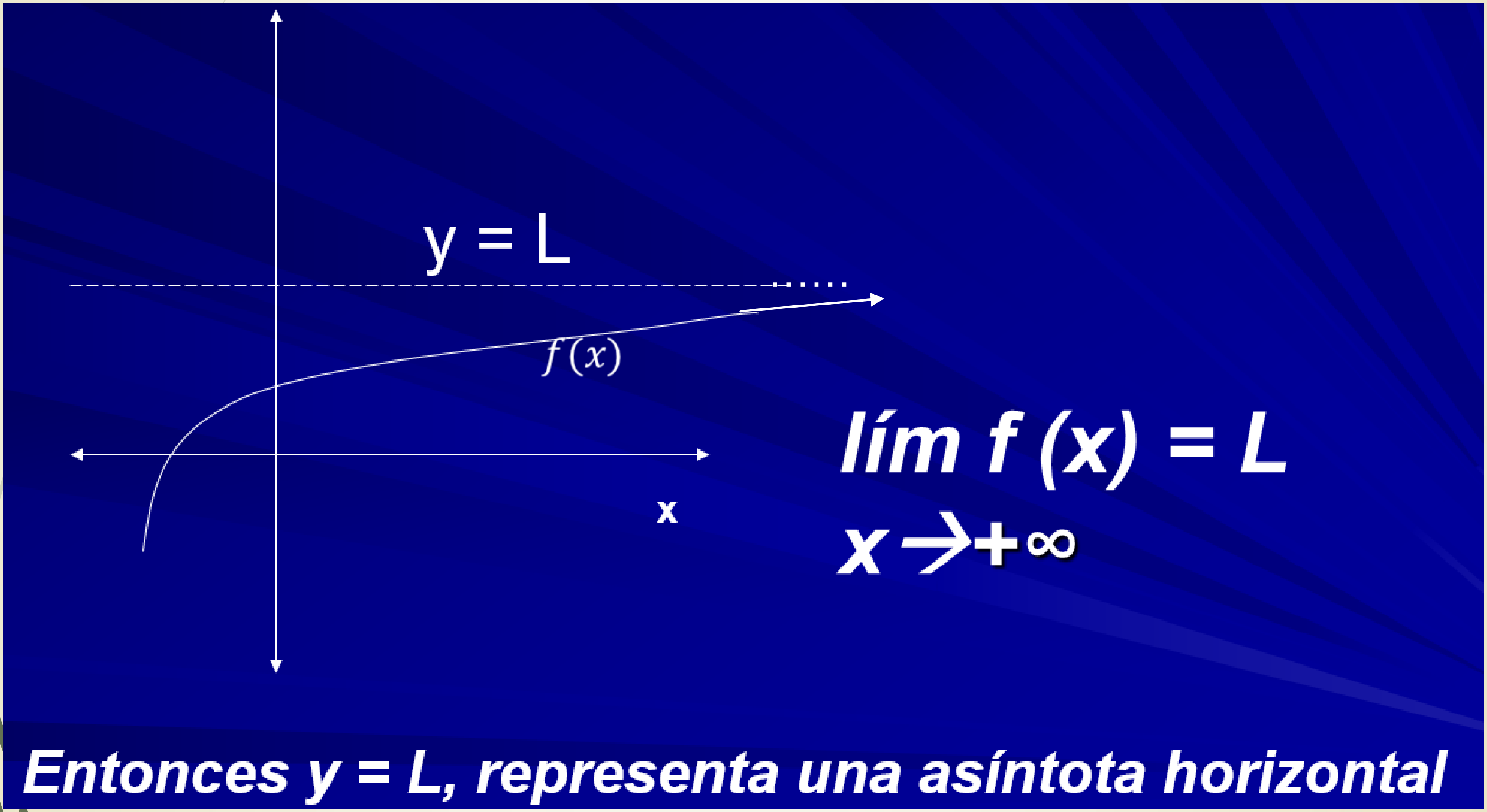
La función tiene un límite en el + infinito. Y la recta $y = L$ es una asíntota

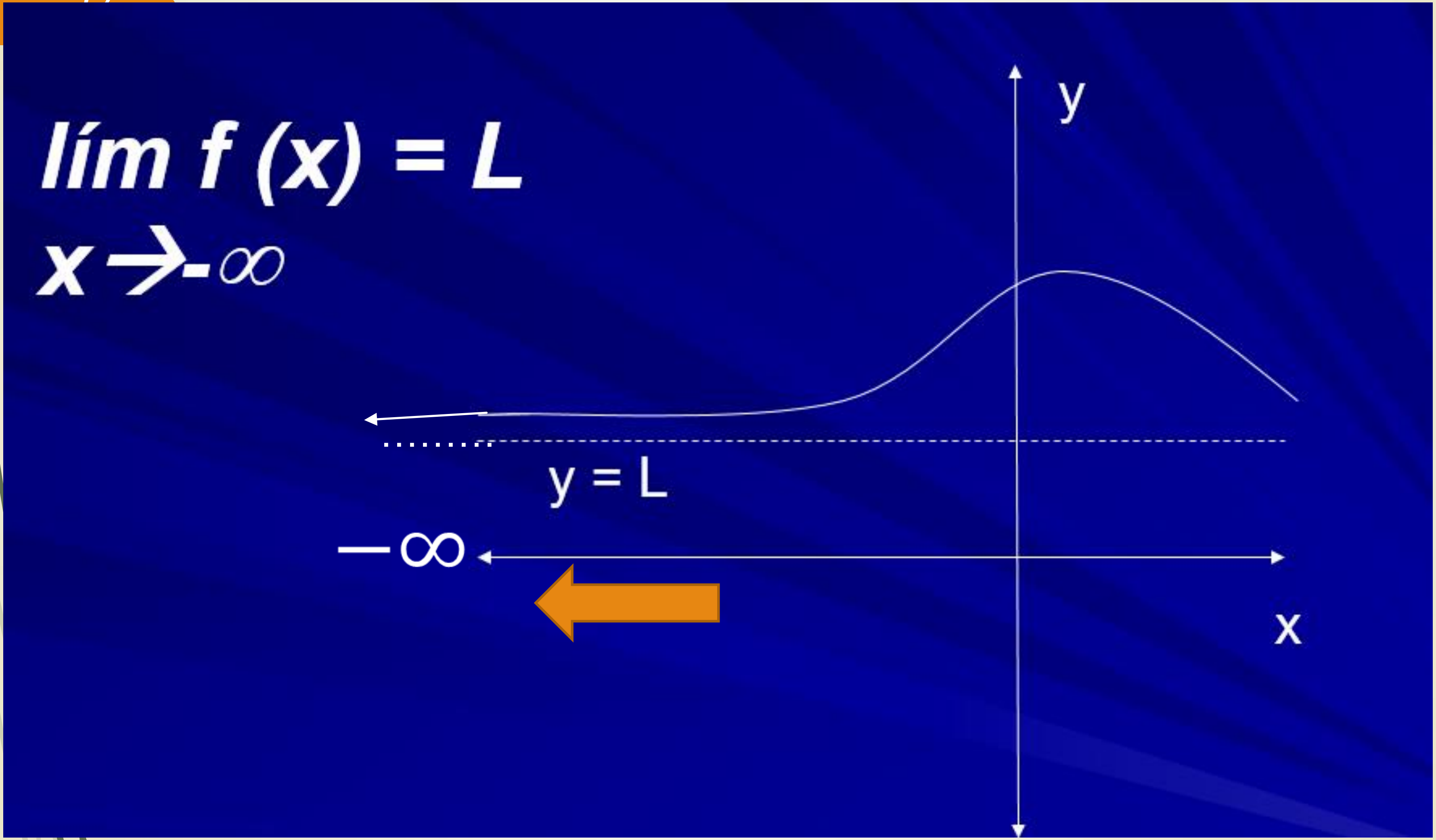
Límites en infinito (-∞) por la izquierda

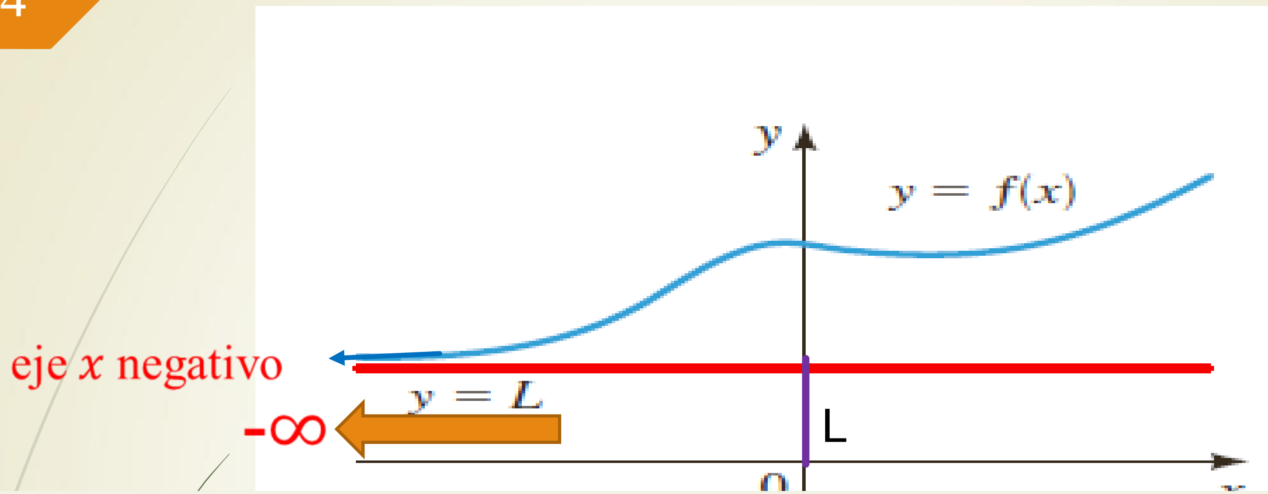
Si los valores de la función $f(x)$ tienden a un número M cuando x disminuye indefinidamente (por la izquierda):

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$$

La función tiene un límite en $-$ infinito. Y la recta $y = M$ es una asíntota.


y = L
f(x)
x
lím f (x) = L
x→+∞
Entonces y = L, representa una asíntota horizontal


lím f (x) = L
x → -∞
y
y = L
−∞
x



La recta $y = L$ se **denomina asíntota** horizontal de la curva $y = f(x)$

LÍMITE EN EL INFINITO NEGATIVO

Sea f una función definida en algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

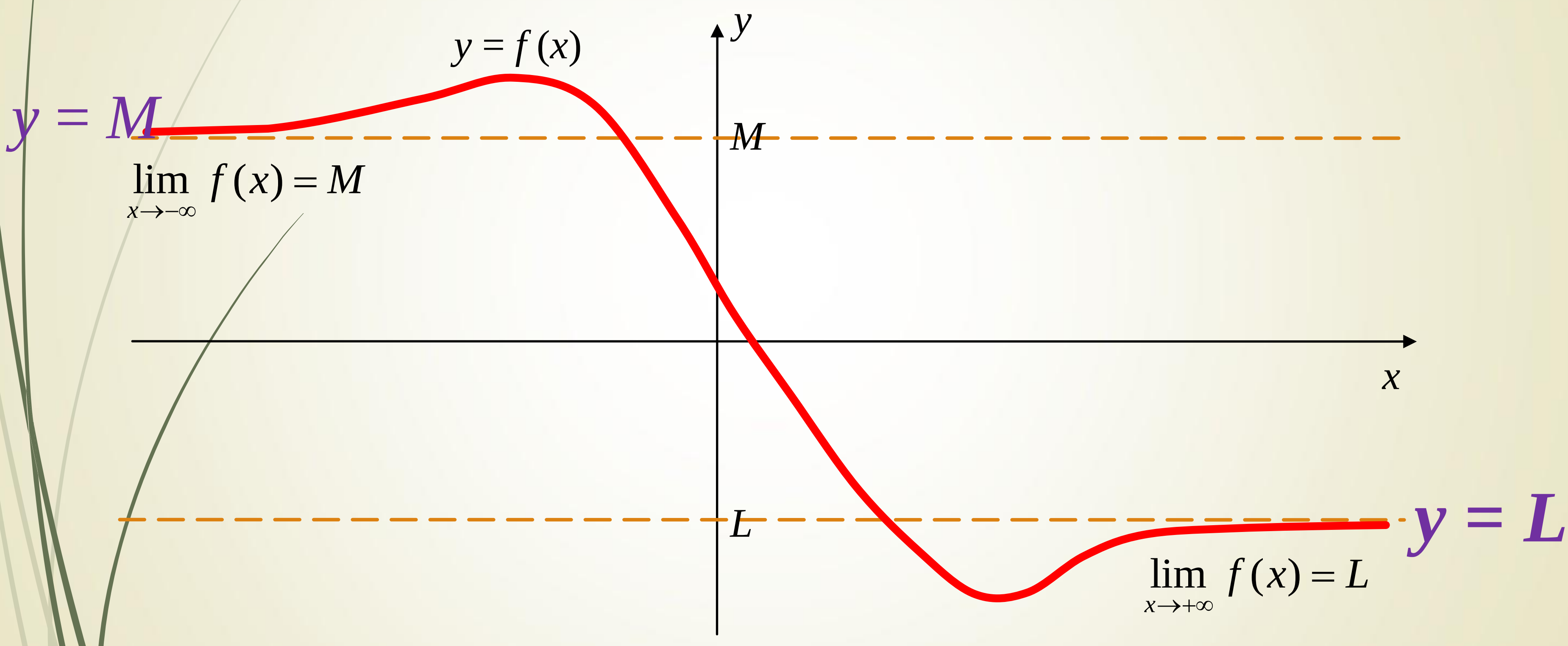
significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L si tomamos x suficientemente grande negativa.

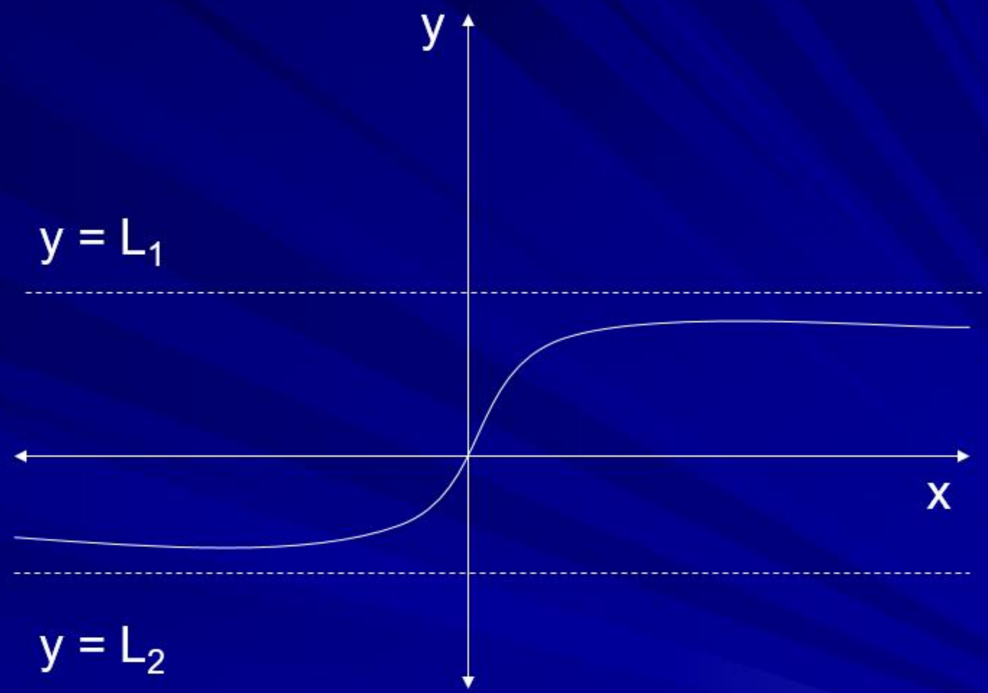
Definición

La recta de ecuación y = L es una asíntota horizontal de la gráfica de la función f(x) si al menos una de las siguientes proposiciones es verdadera:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

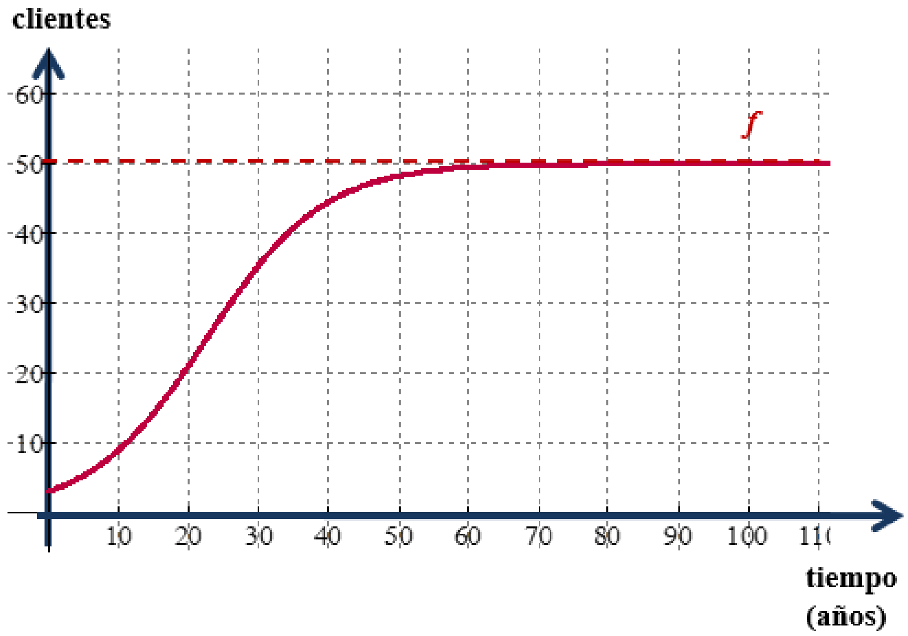
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$


$y = f(x)$
y
$y = M$
M
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$
x
L
$y = L$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

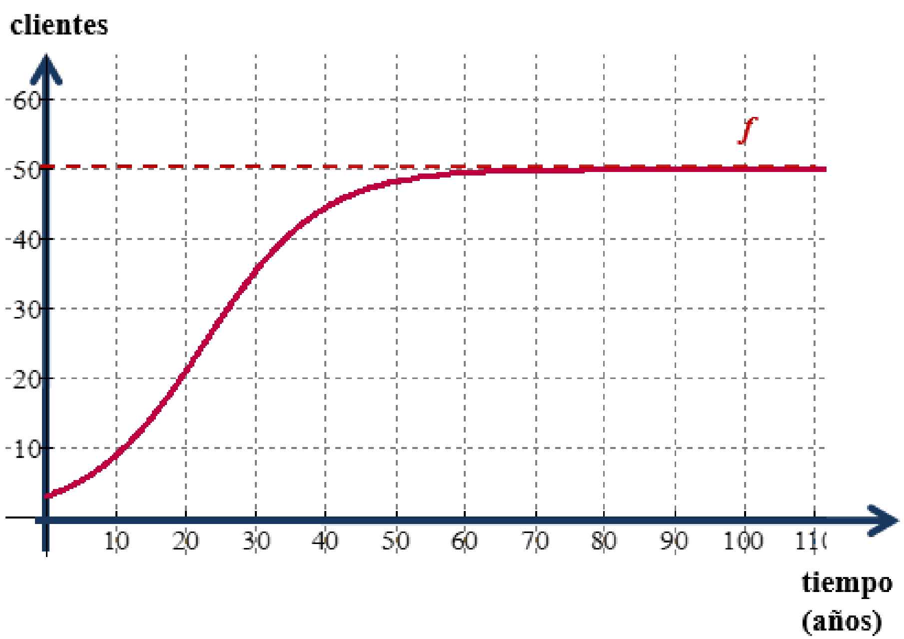


Son asíntotas horizontales

$y = L_1$ y $y = L_2$



¿Cuál es el máximo número esperado de clientes al cual se tiende en el largo plazo?



¿ 50 ?

¿Cuál es el máximo número esperado de clientes al cual se tiende en el largo plazo?

¿ $t \to +\infty$?

Entonces: $$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 50$$

Esto es un límite al infinito, que nos indica a qué valor se aproxima la función cuando ***t*** crece indefinidamente.

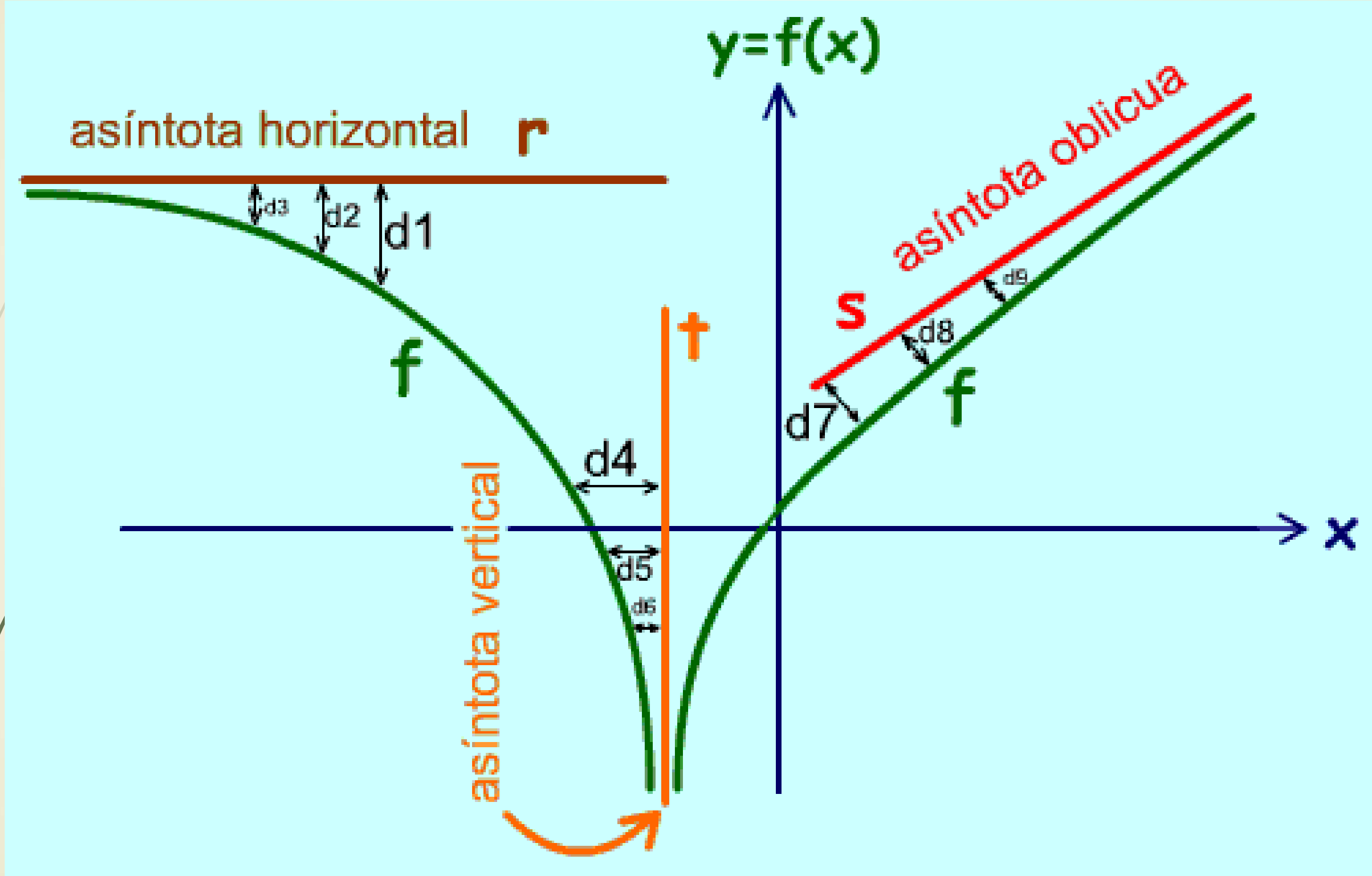
Asíntotas

Se le llama **asíntota** de la gráfica de una función, a una recta a la que se aproxima continuamente la gráfica de tal función.

Es decir que la distancia entre las dos tiende a ser cero (0), a medida que se extienden indefinidamente.

Tipos de asíntotas

- **Asíntotas horizontales**: rectas paralelas al eje x, de ecuación $y = constante$.
- **Asíntotas verticales**: rectas perpendiculares al eje de la x (paralelas al eje y), de ecuación $x = constante$.
- **Asíntotas oblicuas**: si no son paralelas o perpendiculares a los ejes, de ecuación $y = mx + b$.



En cada caso la distancia entre la curva y la recta se hace cada vez más pequeña.

16/03/2018

http://www.x.edu.uy/asintota.htm

Las asíntotas horizontales se calculan de la siguiente forma:

Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$, entonces $y = a$ es una asíntota horizontal para $f(x)$ (por la izquierda).

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, entonces $y = b$ es una asíntota horizontal para $f(x)$ (por la derecha).

Una función puede tener a lo sumo dos asíntotas horizontales: una por la izquierda y otra por la derecha.

https://www.gaussianos.com/calcular-las-asintotas-de-una-funcion/

Asíntotas horizontales

Características y pasos para calcular asíntotas horizontales

Las asíntotas horizontales nos indican a que tiende la función cuando la x es muy grande o muy pequeña.

$+\infty$ $-\infty$

1 Calculamos el límite de la función cuando x tiende a infinito.

Si existe el límite (valor finito), el valor del límite es una asíntota horizontal.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ El valor de la asíntota se escribe: $y = b$

2 Son rectas paralelas al eje OX. Se escriben:

y = valor de la asíntota horizontal.

http://www.vadenumeros.es/primero/asintotas-verticales.htm

Asíntotas horizontales de funciones racionales y exponenciales

3 Las funciones racionales tienen asíntota horizontal en los siguientes casos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$ La función al hacer el límite queda de la forma $\frac{\infty}{\infty}$

a) Cuando el numerador y el denominador son del mismo grado.

b) Cuando el grado del denominador es mayor que el grado del numerador.

4 Las funciones exponenciales tienen una asíntota horizontal en $y = 0$.

Límite en el infinito (-∞) de e^x

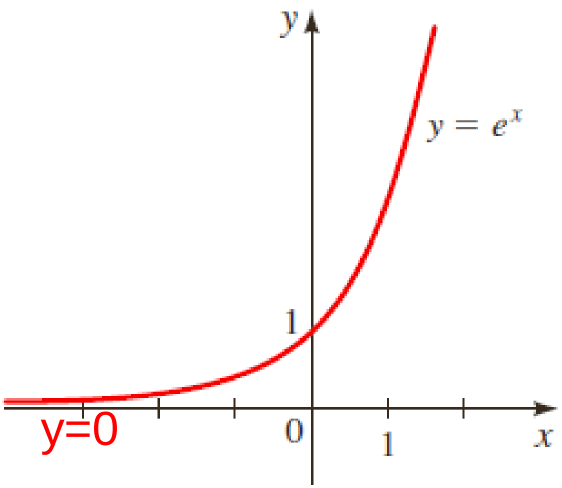
EJEMPLO 3 | Un límite en el infinito negativo

Use métodos numéricos y gráficos para hallar $\lim_{x \to -\infty} e^x$.

SOLUCIÓN De la gráfica de la función exponencial natural $y = e^x$ de la Figura 7 y la correspondiente tabla de valores, vemos que

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Se deduce que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal.



x	e^x
0	1.00000
−1	0.36788
−2	0.13534
−3	0.04979
−5	0.00674
−8	0.00034
−10	0.00005

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

EJEMPLO 2 | Hallar un límite en el infinito

Evalúe $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$.

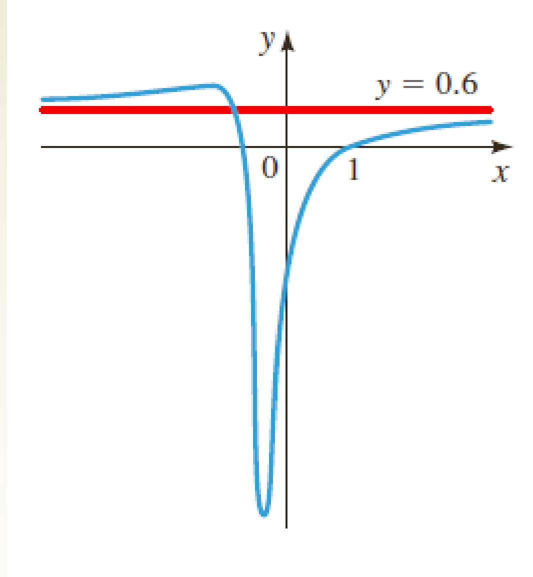
SOLUCIÓN Para evaluar el límite en el infinito de una función racional, primero dividimos el numerador y el denominador entre la potencia superior de x que haya en el denominador. (Podemos suponer que $x \neq 0$, porque estamos interesados sólo en valores grandes de x.) En este caso, la potencia superior de x del denominador es x^2, de modo que tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

Divida numerador y denominador entre x^2

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)}$$

Límite de un cociente



$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 3 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} - 2 \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 5 + 4 \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}$$

Límites de Sumas y Diferencias

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3}{5}$$

Sea $x \to \infty$

Un cálculo similar muestra que el límite cuando $x \to -\infty$ también es $\frac{3}{5}$. La Figura 6 ilustra los resultados de estos cálculos al demostrar la forma en que la función racional dada se aproxima a la asíntota horizontal $y = \frac{3}{5}$.=0.6

Para funciones racionales: $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \mathrm{K} + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \mathrm{K} + b_1 x + b_0}$

Resolución simplificada:

Calcular el límite, tomando en cuenta el término dominante del numerador y del denominador:

mayor

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Evalúe $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$. $=$ $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{5x^2}$ $= \frac{3}{5}$

Ejemplos de asíntotas horizontales

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ al reemplazar ∞ *resulta uan indetermianción de la forma* $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x} = 1$$

Hay una asíntota horizontal en $y = 1$

http://www.vadenumeros.es/primero/asintotas-verticales.htm

EJEMPLO 5 Límite en el infinito

Evalúe $\lim_{x\to\infty} \frac{-6x^4 + x^2 + 1}{2x^4 - x}$.

Solución No es posible aplicar la ley del límite de un cociente en (13) a la función dada, puesto que $\lim_{x\to\infty}(-6x^4 + x^2 + 1) = -\infty$ y $\lim_{x\to\infty}(2x^4 - x) = \infty$. No obstante, al dividir el numerador y el denominador entre x^4 podemos escribir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-6x^4 + x^2 + 1}{2x^4 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6 + \left(\frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{x^4}\right)}{2 - \left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left[-6 + \left(\frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{x^4}\right)\right]}{\lim_{x\to\infty}\left[2 - \left(\frac{1}{x^3}\right)\right]} \quad \leftarrow$$

El límite del numerador existe, así como el límite del denominador, y el límite del denominador no es cero

$$= \frac{-6 + 0 + 0}{2 - 0} = -3.$$

Esto significa que la recta $y = -3$ es una asíntota horizontal para la gráfica de la función.

Solución alterna es posible descartar todas las potencias de x, menos la más alta:

descartar términos de los recuadros azules

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-6x^4 \boxed{+\,x^2+1}}{2x^4 \boxed{-\,x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-6x^4}{2x^4} = \lim_{x\to\infty}\frac{-6}{2} = -3.$$

EJEMPLO 6 Límite infinito en el infinito

Evalúe $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1 - x^3}{3x + 2}$.

Solución Por (14),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - x^3}{3x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3}{3x} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty} x^2 = -\infty.$$

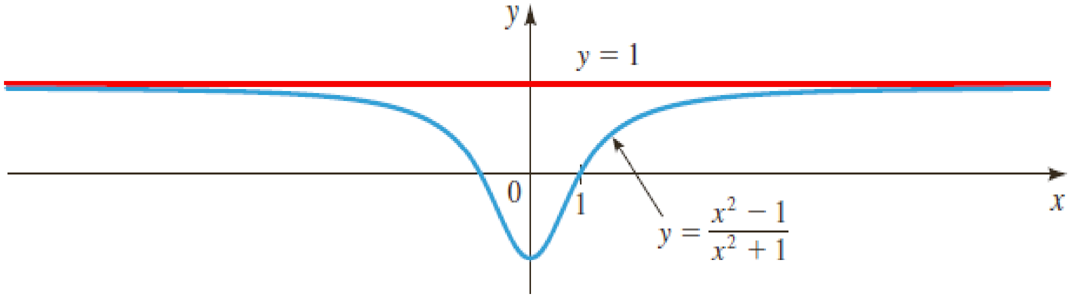
En otras palabras, el límite no existe. ■

x	$f(x)$
0	−1.000000
±1	0.000000
±2	0.600000
±3	0.800000
±4	0.882353
±5	0.923077
±10	0.980198
±50	0.999200
±100	0.999800
±1000	0.999998

Investiguemos el comportamiento de la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

cuando x se hace grande. La tabla del margen da valores de esta función redondeados a seis lugares decimales; la gráfica de f ha sido trazada por computadora en la Figura 1.



- Una de las conclusiones que se pueden sacar es la siguiente:

En las asíntotas horizontales planteamos siempre los mismos límites cuando x tiende a $\pm\infty$ y el resultado es el que nos dice si existen o no.

Ejercicios:

Calcule los siguientes límites y asíntotas

1. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2+5}{2x^2+3}$$

2. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4-3x}{1-2x}$$

3. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4-3x}{1-2x}$$

4. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+7}{x^2-3}$$