Ejercicios de límites

$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ indeterminación de la forma $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Para evitarla, racionalizamos, simplificamos y por último sustituimos x por 3:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \lim_{x \to 3} \frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \frac{1}{4}$$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$ indeterminación de la forma $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Para evitarla, racionalizamos, simplificamos y por último sustituimos x por 0:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x+2-2}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$ indeterminación de la forma $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Para evitarla, realizamos las operaciones que se nos indica en el numerador, simplificamos y por último sustituimos h por 0:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right)=3x^2$$

Resolver: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$

Solución

Indeterminación de la forma $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Para evitarla, dividimos numerador y denominador por x :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x+3}{x}}{\dfrac{x+\sqrt[3]{x}}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}} = 2$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = 0$$

Resolver: $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

Indeterminación de la forma $\{\infty-\infty\}$.

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(x^2+1-x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$$

En la última expresión dividimos numerador y denominador por *x*, con lo cual obtenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

4.2-4 Resolver: $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

Indeterminación de la forma $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Para evitarla, dividimos numerador y denominador por $\sqrt{x}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}} = 1$$

Resolver: $\lim_{x \to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

Solución

Indeterminación de la forma $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Racionalizamos, descomponemos en factores, simplificamos y finalmente sustituimos x por 7:

$$\lim_{x \to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \lim_{x \to 7} \frac{\left(2-\sqrt{x-3}\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}{\left(x^2-49\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)} = \lim_{x \to 7} \frac{4-(x-3)}{\left(x^2-49\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{7-x}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)} = -\lim_{x \to 7} \frac{x-7}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)} =$$

$$= -\lim_{x \to 7} \frac{1}{(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)} = -\frac{1}{14 \cdot 4} = -\frac{1}{56}$$

Resolver: $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

Solución

Indeterminación de la forma $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Racionalizamos, descomponemos en factores, simplificamos y finalmente sustituimos x por 7:

$$\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\lim_{x\to 7}\frac{\left(2-\sqrt{x-3}\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}{\left(x^2-49\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\lim_{x\to 7}\frac{4-(x-3)}{\left(x^2-49\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=$$

Multiplico por –

$$=\lim_{x\to 7}\frac{7-x}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=-\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=$$

$$=-\lim_{x\to 7}\frac{1}{(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=-\frac{1}{14\cdot 4}=-\frac{1}{56}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2 + 8x + 15} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{8x}{x^2} + \frac{15}{x^2}}$$

Se divide el numerador y el denominador entre la mayor potencia del denominador: X^2

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5}{x^2}}{1 + \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}} \qquad \mathit{simplificar\ términos\ comunes}$$

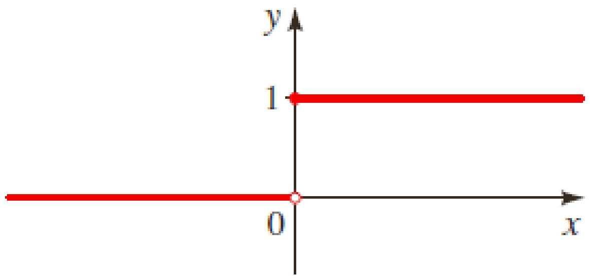
$$= \frac{0}{1+0+0} = 0 \qquad \mathit{aplicar\ la\ prop.:}\ \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0$$

$$\mathit{De\ igual\ manera:} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x^2 + 8x + 15} = 0$$

El límite cuando $X \to -\infty$ también es cero dado que X^2 se vuelve positiva

Límites que no existen

No necesariamente las funciones se aproximan a un valor finito en todo punto. En otras palabras, es posible que un límite no exista. Los siguientes tres ejemplos ilustran formas en las que esto puede ocurrir.



EJEMPLO 3 | Un límite que no existe (una función con un salto)

La función Heaviside H está definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

[Esta función, llamada así en honor al ingeniero electricista Oliver Heaviside (1850-1925), puede usarse para describir una corriente eléctrica que se conecta en un tiempo $t = 0$.] Su gráfica se muestra en la Figura 6. Nótese el "salto" en la gráfica en $x = 0$.

Cuando t se aproxima a 0 por la izquierda, $H(t)$ se aproxima a 0. Cuando t se aproxima a 0 por la derecha, $H(t)$ se aproxima a 1. No hay número al que $H(t)$ se aproxime cuando t se aproxima a 0. Por lo tanto, $\lim_{t \to 0} H(t)$ no existe.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 27

EJEMPLO 5 | Un límite que no existe (una función con asíntota vertical)

Encuentre $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ si existe.

SOLUCIÓN Cuando x se acerca a 0, x^2 también se acerca a 0, y $1/x^2$ se hace muy grande. (Vea la tabla al margen.) En realidad, parece en la gráfica de la función $f(x) = 1/x^2$ de la Figura 8 que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes al tomar x cerca lo suficiente de 0. Entonces los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número, de modo que $\lim_{x \to 0} (1/x^2)$ no existe.

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10,000
± 0.001	1,000,000