Límites de Funciones Trigonométricas

Profesor Efrén Giraldo T.

Enail: hegiraldo2@Gmail.com

❖**MIS VALORES**

Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

❖**MI VISIÓN:** Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖**MI MISIÓN:** Entrega a la Voluntad Suprema.
Servir a las personas.

$$\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a, \qquad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a.$$

$$\lim_{x \to a} \tan x = \tan a, \qquad \lim_{x \to a} \cot x = \cot a,$$

$$\lim_{x \to a} \sec x = \sec a, \qquad \lim_{x \to a} \csc x = \csc a.$$

Para hallar los límites de la funciones trigonométricas básicas basta reemplazar el valor de *a* en la función y ese es el límite.

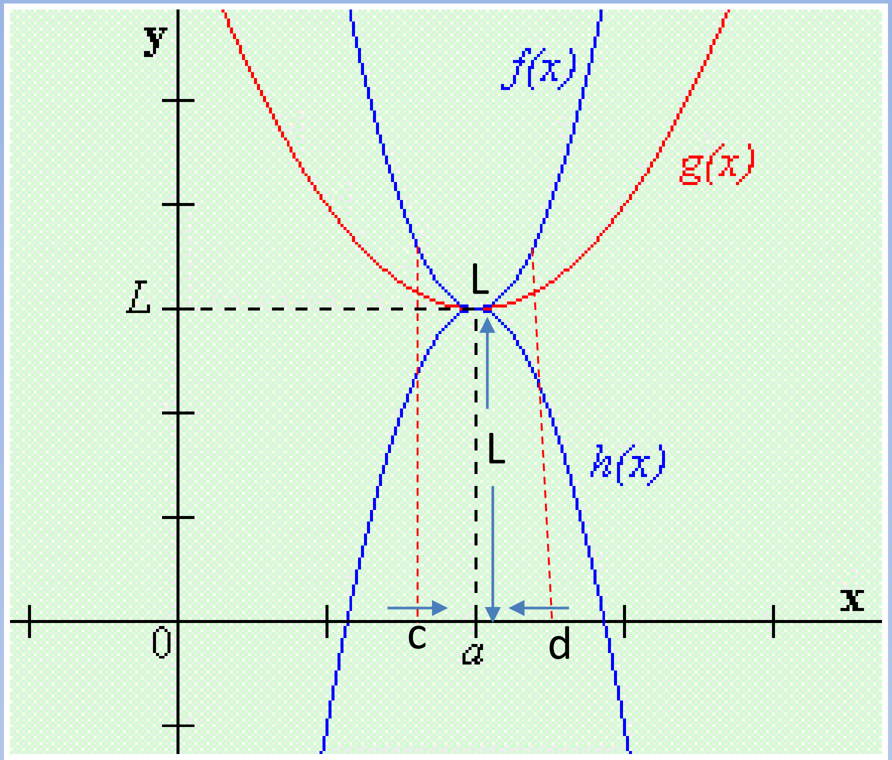
$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

sen x

Teorema de la Compresión= Teorema del Sandwich

- Este teorema enuncia que si dos funciones tienden al mismo límite en un punto a, cualquier otra función que esté entre las dos anteriores tendrá el mismo límite en ese punto.

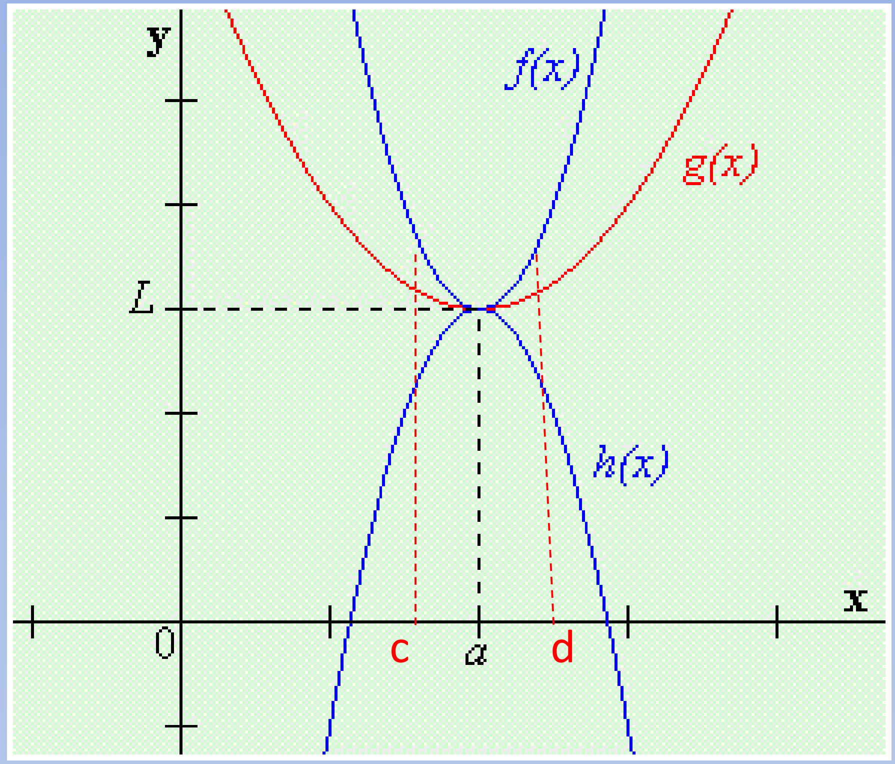
Es frecuentemente utilizado para encontrar el límite de una función a través de la comparación con otras dos funciones de límite conocido o fácilmente calculable.



Observe que el valor de y para g(x) en el intervalo cd es menor que la y de f(x) y mayor que la y de h(x), esto para valores de y diferentes del límite, donde son todas las y iguales.

Lo que equivale a decir que si $h(x) \leq g(x) \leq f(x)$ para todo x en un intervalo abierto cd que contiene a, se cumple que

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x)$$



- Este teorema enuncia que si dos funciones tienden al mismo límite en un punto de un intervalo, cualquier otra función que pueda ser dibujada entre las dos anteriores tendrá el mismo límite en el mismo punto.

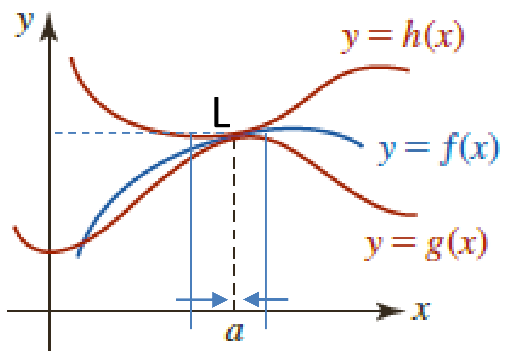


FIGURA 2.4.1 Gráfica de f oprimida entre las gráficas de g y h

Teorema 2.4.1 Teorema de compresión

Suponga que f, g y h son funciones para las cuales $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contiene a un número a, excepto posiblemente al mismo a. Si

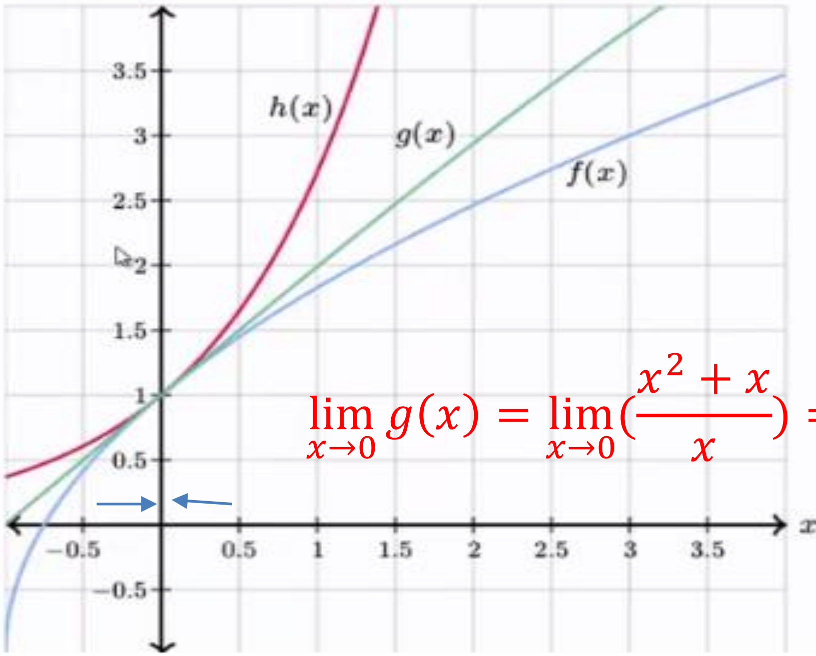
$$\lim_{x \to a} g(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Las gráficas de

$$f(x) = 2\sqrt{x+1} - 1\,, \quad g(x) = \frac{x^2 + x}{x}\,, \quad \text{y} \quad h(x) = e^x$$

se muestran a continuación.



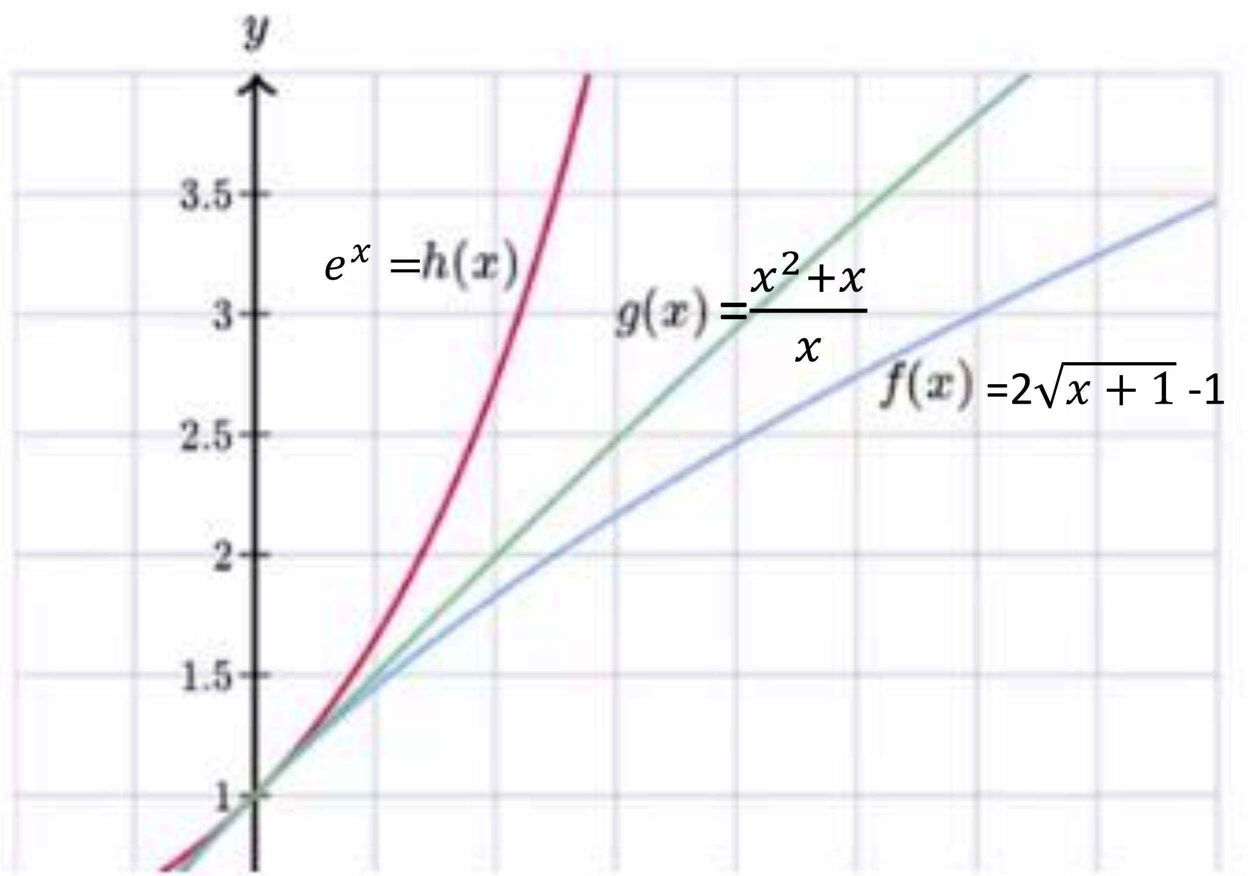
$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 + x}{x}\right) = ?$$

https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus/limits-from-equations-dc/squeeze-theorem-dc/v/squeeze-theorem-exercise-example

Las gráficas de

$$f(x) = 2\sqrt{x+1} - 1\,, \quad g(x) = \frac{x^2+x}{x}\,, \quad \text{y} \quad h(x) = e^x$$

se muestran a continuación.



https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus/limits-from-equations-dc/squeeze-theorem-dc/v/squeeze-theorem-exercise-example

$$2\sqrt{x+1}-1 \le \frac{x^2+x}{x} \le e^x$$

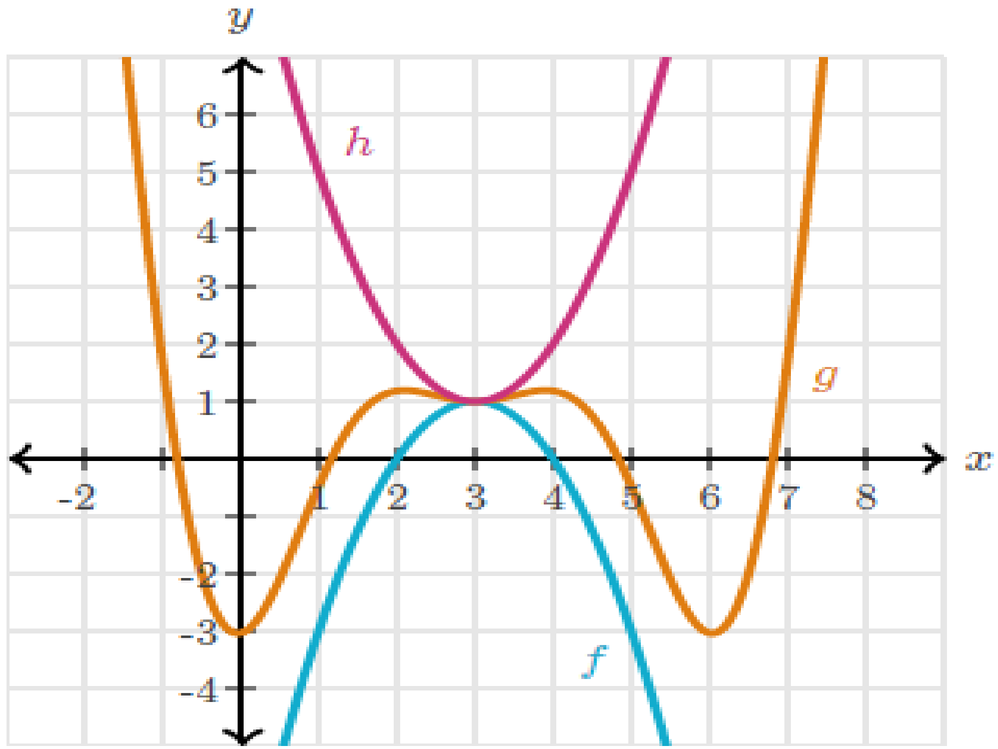
Esto significa que

$$\lim_{x\to 0}\left(2\sqrt{x+1}-1\right) \le \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x} \le \lim_{x\to 0} e^x$$

$$1 \le \lim_{x\to \mathbf{0}}\left(\frac{x^2+x}{x}\right) = \le 1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x}{x}\right) = 1$$

https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus/limits-from-equations-dc/squeeze-theorem-dc/v/squeeze-theorem-exercise-example



Además:

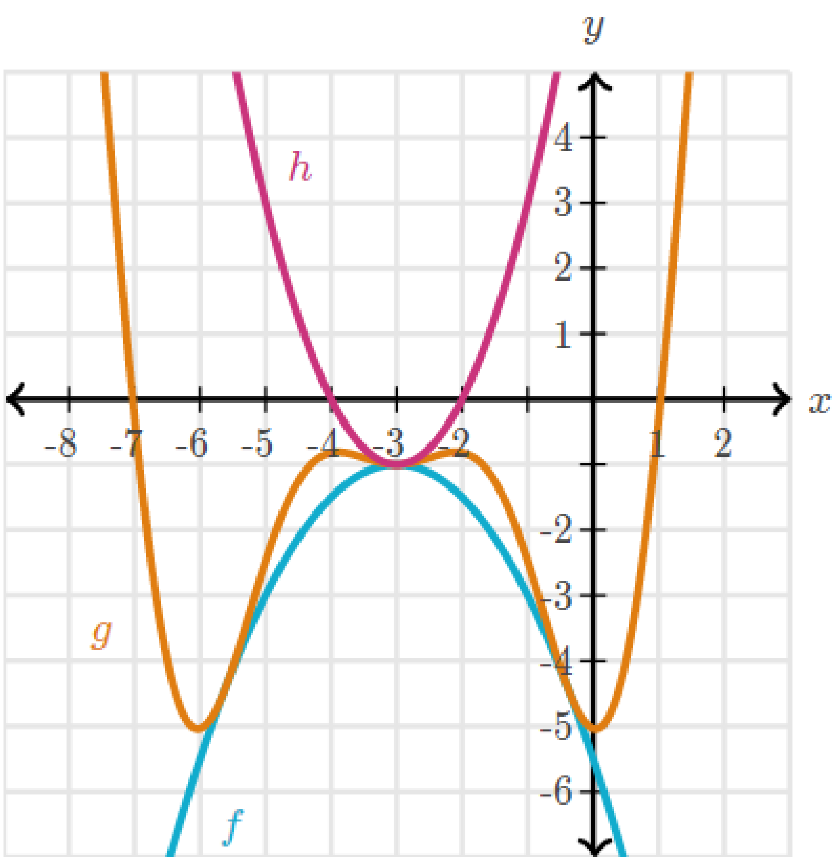
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ para toda } x$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} h(x) = 1$$

¿Cuál es el valor de $\lim_{x \to 3} g(x)$?

https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus/limits-from-equations-dc/squeeze-theorem-dc/e/squeeze-theorem

Aquí están las gráficas de las funciones continuas f, g, y h.



Además:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ para toda } x$$

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} h(x) = -1$$

¿Cuál es el valor de $\lim_{x \to -3} g(x)$?

1 / 3

Se tiene que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Como las funciones son continuas, se sigue que

$$\lim_{x \to 3} f(x) \leq \lim_{x \to 3} g(x) \leq \lim_{x \to 3} h(x)$$

2 / 3

También está dado que $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} h(x) = 1$.

Podemos sustituir esto en la desigualdad de arriba:

$$1 \leq \lim_{x \to 3} g(x) \leq 1 \longrightarrow \lim_{x \to 3} g(x) = 1$$

3 / 3

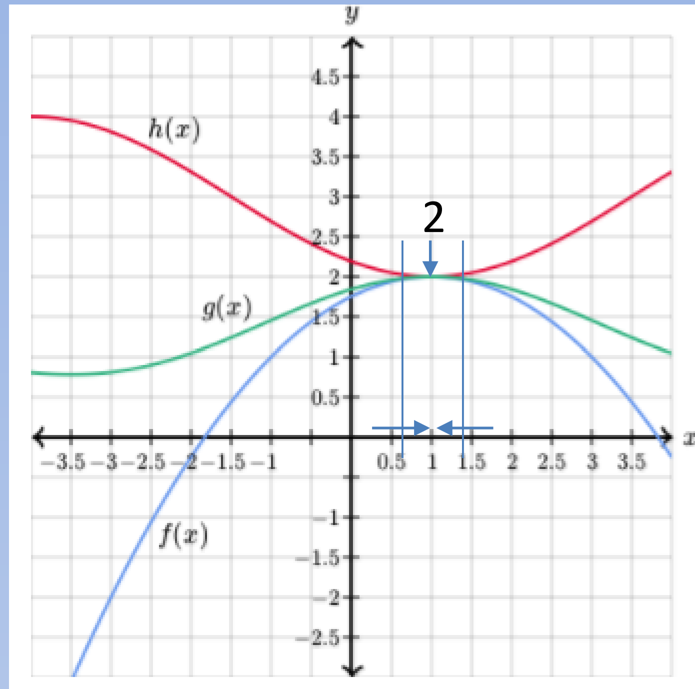
Por el teorema del sándwich,

https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus/limits-from-equations-dc/squeeze-theorem-dc/e/squeeze-theorem

Esta desigualdad se cumple para toda x cerca de -1 excepto quizá para $x = -1$:

$$x^3 - x^2 - 3x + 5 \leq g(x) \leq 2x + 8$$

¿Cuál es el valor de $\lim_{x \to -1} g(x)$?



Las gráficas de las funciones continuas f (en azul), g (en verde) y h (en rojo) se muestran a continuación. Se tiene que

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para toda x cercana a 1,

$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to 1} h(x) = 2$. $\longrightarrow$ $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$

¿Cuál es el valor de $\lim_{x\to 1} g(x)$?

https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus/limits-from-equations-dc/squeeze-theorem-dc/v/squeeze-sandwich-theorem

Límite de $\underset{x \to 0}{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

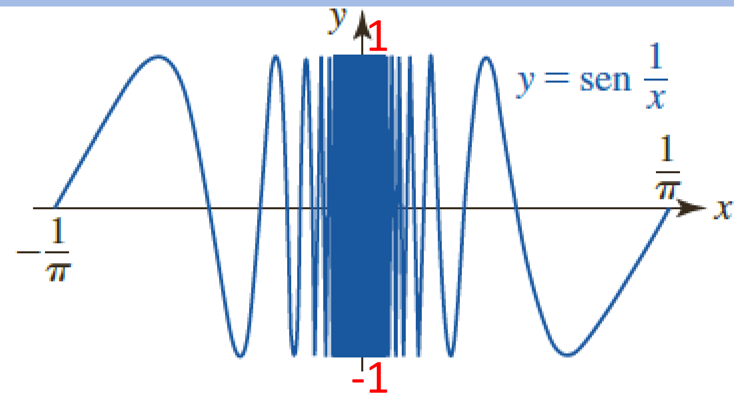


FIGURA 2.4.2 Gráfica de la función en el ejemplo 2

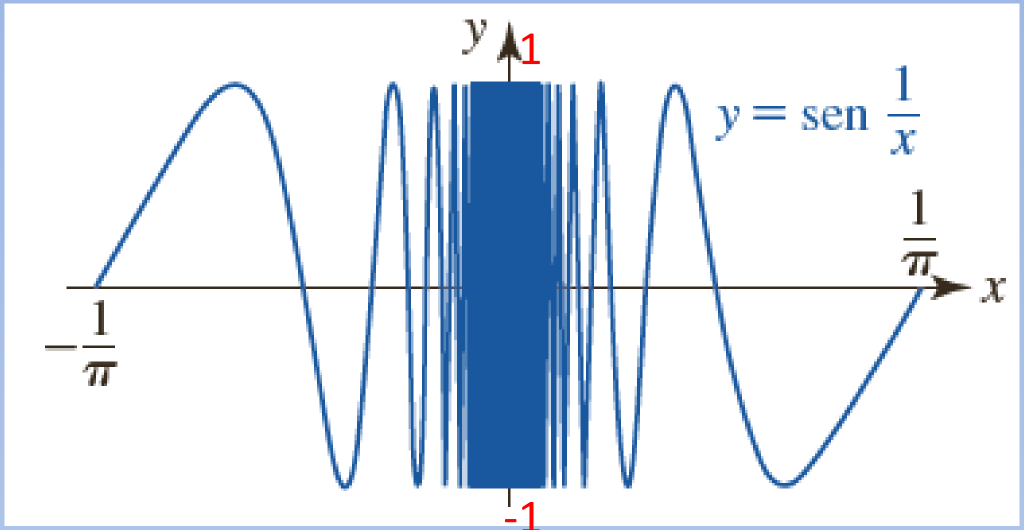
EJEMPLO 2 Un límite que no existe

El límite $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe. La función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ es impar pero no es periódica. La gráfica oscila entre -1 y 1 cuando $x \to 0$:

$$\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \pm 1$$

Cuando x tiende a 0, $f(x)$ tiende a 2 valores de L, por tanto no tiene límite.

- Lo que ocurre: con valores muy cercanos a cero la función $sen\ (\frac{1}{x})$ oscila tanto y tan rápidamente que no es posible determinar a qué valor tiende cuando x tiende a 0.



La mancha azul significa que cerca del origen la gráfica de *f* se vuelve tan comprimida que parece ser una mancha continua de color.

Y la función en todo momento está entre -1 y 1, se podría decir que pasa instantáneamente de -1 a 1 y de 1 a -1. Oscila a gran velocidad.

Uso del teorema de la Compresión

No obstante, esta función y su intervalo puede servir para algunos fines.

De la gráfica se deduce que sen $\left(\frac{1}{x}\right)$ oscila entre -1 y 1, en las cercanías de 0. lo que se expresa de la siguiente manera:

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

Límite de $x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

- A pesar de que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe la función $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ se puede emplear para calcular el límite de funciones creadas a partir de ella:

Como desigualdad que es, se puede multiplicar todos sus términos por x^2 (una función conocida) :

$$-1 \leq \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

Y me dan las gráficas o las obtengo de algún programa de internet, por ejemplo derive:

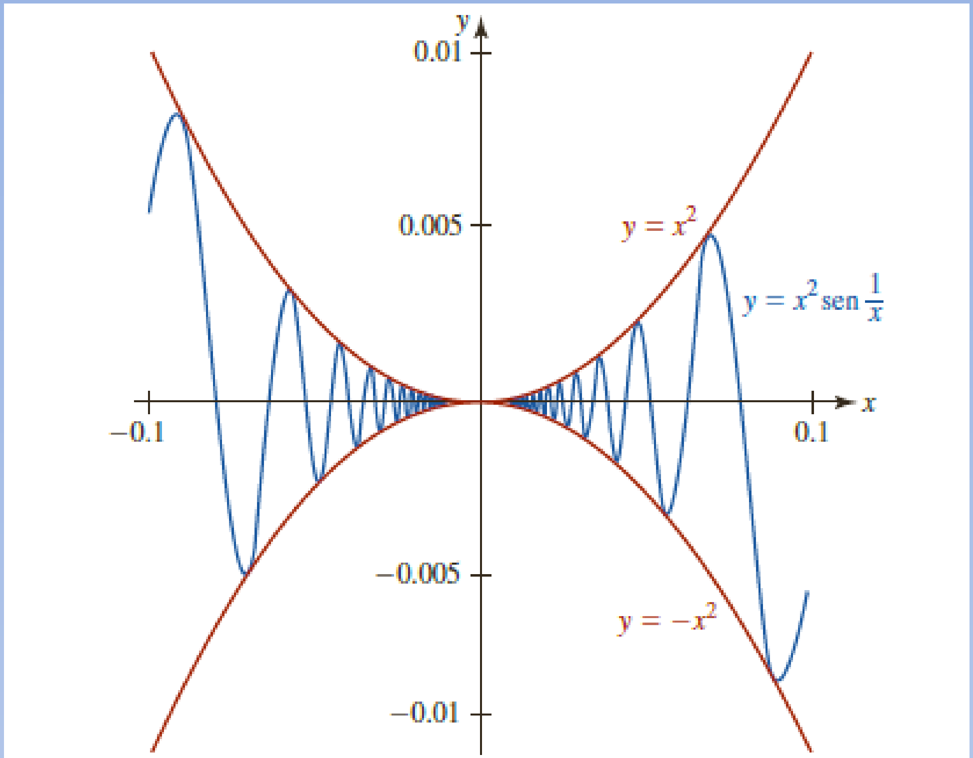


FIGURA 2.4.3 Gráfica de la función

Y saco el límite en 0

$$\lim_{x\to 0} -x^2 \leq \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0} x^2$$

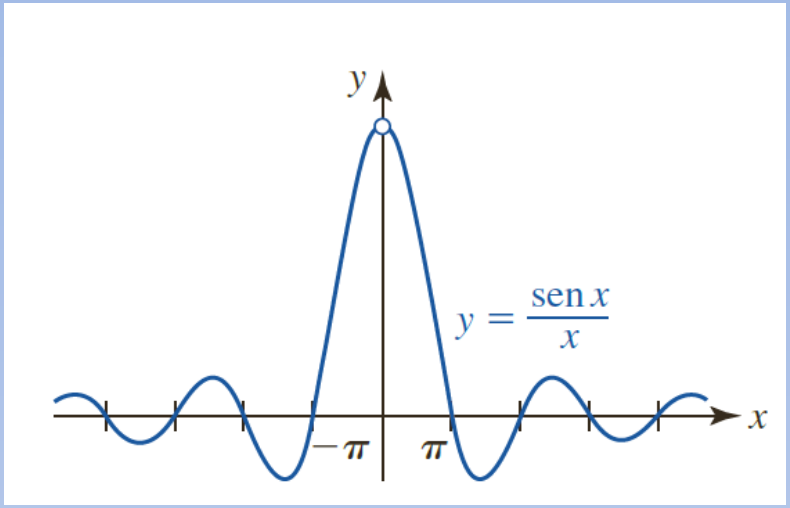
Se observa que los límites de las dos funciones - x^2 y x^2 cuando x tiende a 0, deben ser iguales a 0.

$$0 \leq \lim_{x \to 0} x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$$

Por tanto

$$\lim_{x \to 0} x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Función y= $\frac{sen\ x}{x}$, no confundir $sen\ (\frac{1}{x})$



- Aunque como se puede observar la función y=$\frac{sen\ x}{x}$ no está definida en x=0 (hueco) el límite si existe:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

- El cual se obtiene a partir de:

$$\cos t < \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1.$$

Sustitución de variables

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} kx}{x} = k.$$

Se hace kx igual a una nueva variable t:

$$t = kx$$

De donde $$x = \frac{t}{k}$$

Si $x \longrightarrow 0 \qquad t \longrightarrow 0$

Sustituyo la nueva variable en la ecuación original:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{sen\ \ kx}{x}\right) = \lim_{t \to 0} \frac{sen\ t}{\frac{t}{k}} = \lim_{t \to 0} \frac{ksen\ t}{t} = k * 1 = k$$

EJEMPLO 6 Uso de (5) y (10)

Encuentre el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$.

Solución Al usar $\tan x = (\operatorname{sen} x)/\cos x$ y el hecho de que el límite existe, puede escribirse

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)/\cos x}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} \\
&= \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) \\
&= \frac{1}{1} \cdot 1 = 1. \quad \leftarrow \text{por (5) y (10)}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Una sustitución

Encuentre el límite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2+2x-3}$.

Solución Antes de empezar, observe que el límite tiene la forma indeterminada 0/0 cuando $x \to 1$. Al factorizar $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$ el límite dado puede expresarse como un límite de un producto:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x+3}\cdot\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}\right]. \tag{12}$$

Luego, si se hace $\boxed{t = x - 1, \text{ veremos que } x \to 1 \text{ implica } t \to 0}$ En consecuencia,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1. \quad \leftarrow \text{por (10)}$$

Al volver a (12) es posible escribir

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2+2x-3} &= \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x+3}\cdot\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}\right] \\
&= \left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+3}\right)\left(\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}\right) \\
&= \left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+3}\right)\left(\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2+2x-3} = \left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+3}\right)\left(\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) = \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

EJEMPLO 8 Uso de una identidad pitagórica

Encuentre el límite $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.

Solución Para calcular este límite empezamos con un poco de ingenio algebraico al multiplicar el numerador y el denominador por el factor conjugado del numerador. Luego usamos la identidad pitagórica fundamental $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ en la forma $1 - \cos^2 x = \text{sen}^2 x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)}{x} \cdot \frac{(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)}. \quad = \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x * sen\, x}{x(1+\cos x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)$$
$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right).$$

Debido a que $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/(1+\cos x)=0/2=0$ se tiene

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0.}\qquad (13)\ \blacksquare$$

Puesto que el límite en (13) es igual a 0, puede escribirse

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-(\cos x - 1)}{x} = (-1)\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Luego, al dividir entre -1 se obtiene otro importante límite trigonométrico:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

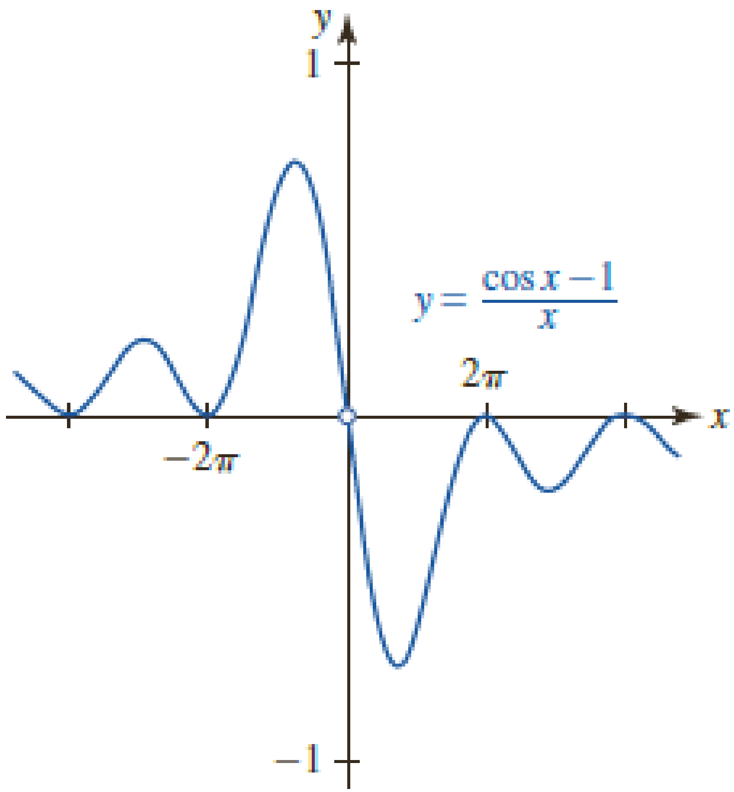


FIGURA 2.4.6 Gráfica de $f(x) = (\cos x - 1)/x$

Con los tres límites, esto es:

$$\lim_{x\to 0} sen x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{sen x}{x} = 1$$

es posible resolver muchos límites de funciones trigonométricas.