Límites de Funciones

Profesor Efrén Giraldo T.

❖**MIS VALORES**

Entrega

Transparencia

Simplicidad

y Persistencia

❖**MI VISIÓN:** Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖**MI MISIÓN:** Entrega a la Voluntad Suprema.

Servir a las personas.

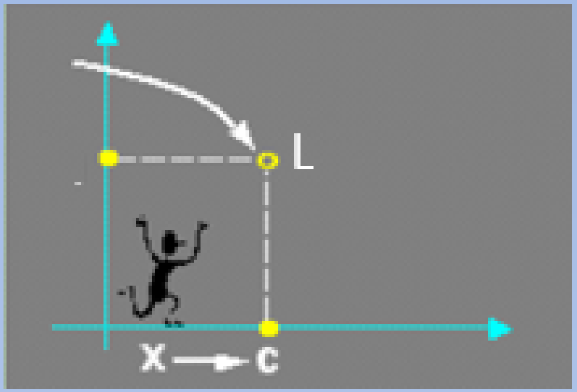
Cuando se trabaja con funciones frecuentemente nos interesa averiguar el comportamiento de una determinada función cuando la variable independiente x, se aproxima a un determinado valor a.

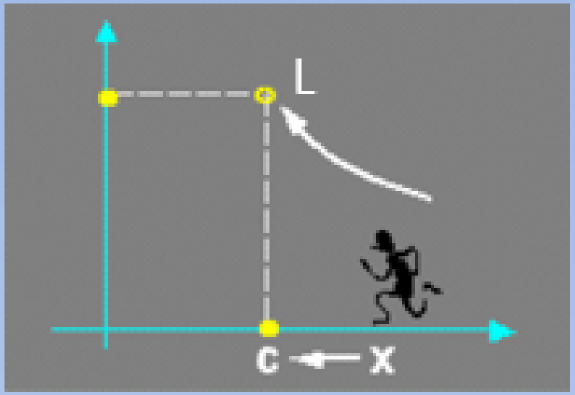
En otras palabras: queremos averiguar si la función se aproxima a un determinado valor L, aumenta indefinidamente, disminuye indefinidamente o no tiene un comportamiento claro, cuando x se aproxima a *a*.

Presentación y Recomendaciones tomadas de la página de límites de la Universidad de los Andes del Profesor Aquiles Páramo Fonseca y de Geogebra.

- «El concepto de límite de una función es fundamental en todos los campos del cálculo. Baste decir que la *derivada*, que es el tema principal del curso de Cálculo Diferencial, es por definición un límite. También lo es el concepto de *integral* y el de *serie*, que son temas que el estudiante se encontrará más adelante en el curso de Cálculo Integral».

Límite de una función



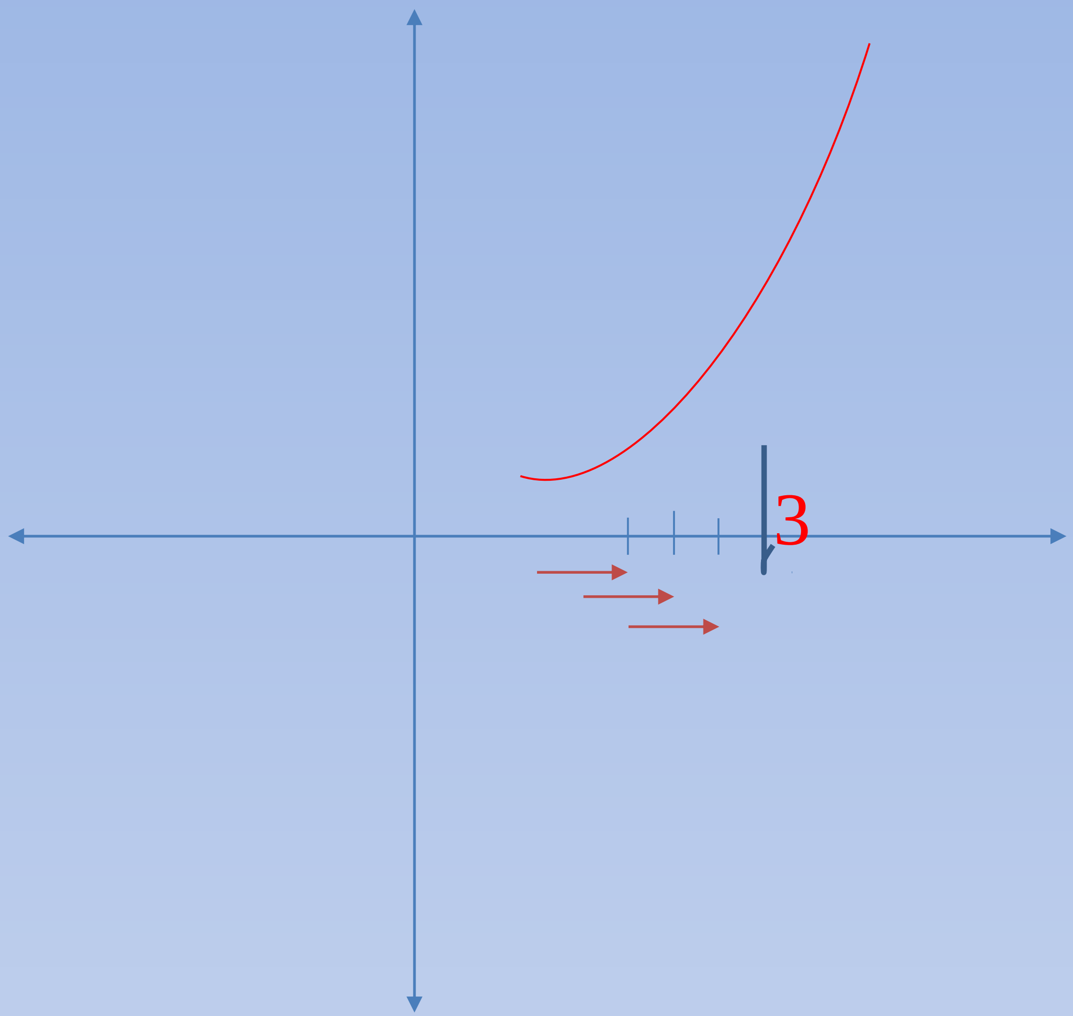


- El límite de una función es el comportamiento de La función en las cercanías a un punto a (o c) en el eje X.
- Qué pasa con la Y cuando me desplazo hacia ese punto desde la izquierda en el eje X?

- Qué pasa con la Y cuando me desplazo hacia ese de punto de X desde la derecha en el eje X?

Significado de acercarse por la izquierda

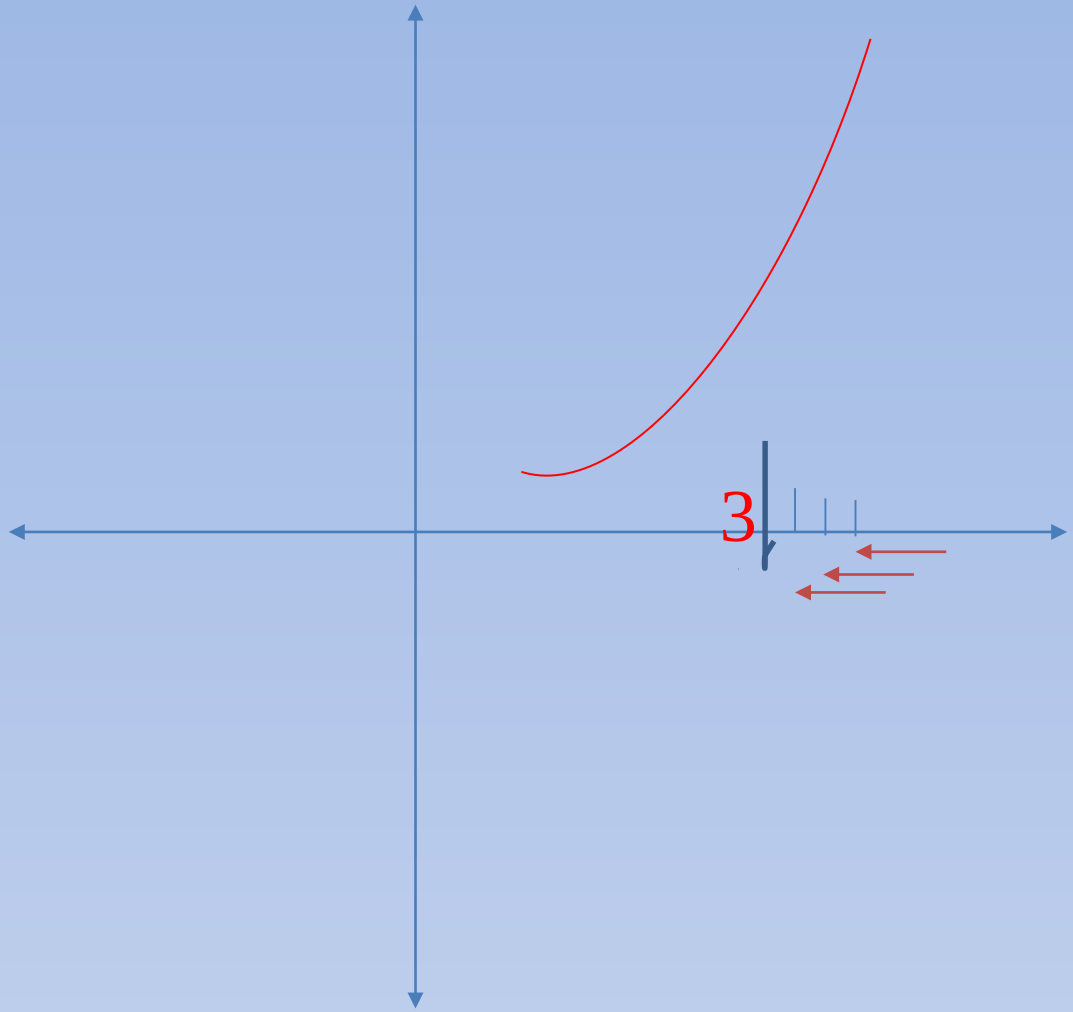
- Observe que si se tiene un punto a por ejemplo 3 en el eje X me puedo acercar a este punto por la izquierda.
- Esto quiere decir que si me acerco por la izquierda necesariamente lo debo hacer con valores menores a $a = 3$. pero estos valores cada vez están aumentando más.
- O sea, debo tomar valores por ejemplo de 2.8, 2.9 2.95 2.97…..
- Siempre tomando un valor menor al inicial (< 2.8) que luego se hace aumentar tendiendo al valor a=3.


3

- Es importante anotar que me puedo acercar tanto a 3 por la izquierda como yo quiera inclusive sin llegar a tocar a 3:
- 2.97 2.99 2.999 2.99999 2.9999999

- También lo podría hacer llegando a tocarlo, o sea, que llegue a 3.

Y se denomina a^{-}, o acercarme a a por debajo.


3

- Es importante anotar que me puedo acercarme también por la derecha a 3 tanto como yo quiera inclusive sin llegar a tocar a 3:
- 3.01 3.005 3.0001 3.0000001
- O sea, que puedo estar tan cerca de 3 como yo quiera, sin llegar a tocarlo o alcanzarlo.

- También lo podría hacer llegando a tocarlo, o sea, que llegue a 3.

Es cuando nos acercamos a a por su lado derecho, se parte de valores mayores de a o sea de valores que están a la derecha de a, estos valores cada vez, disminuyen más.

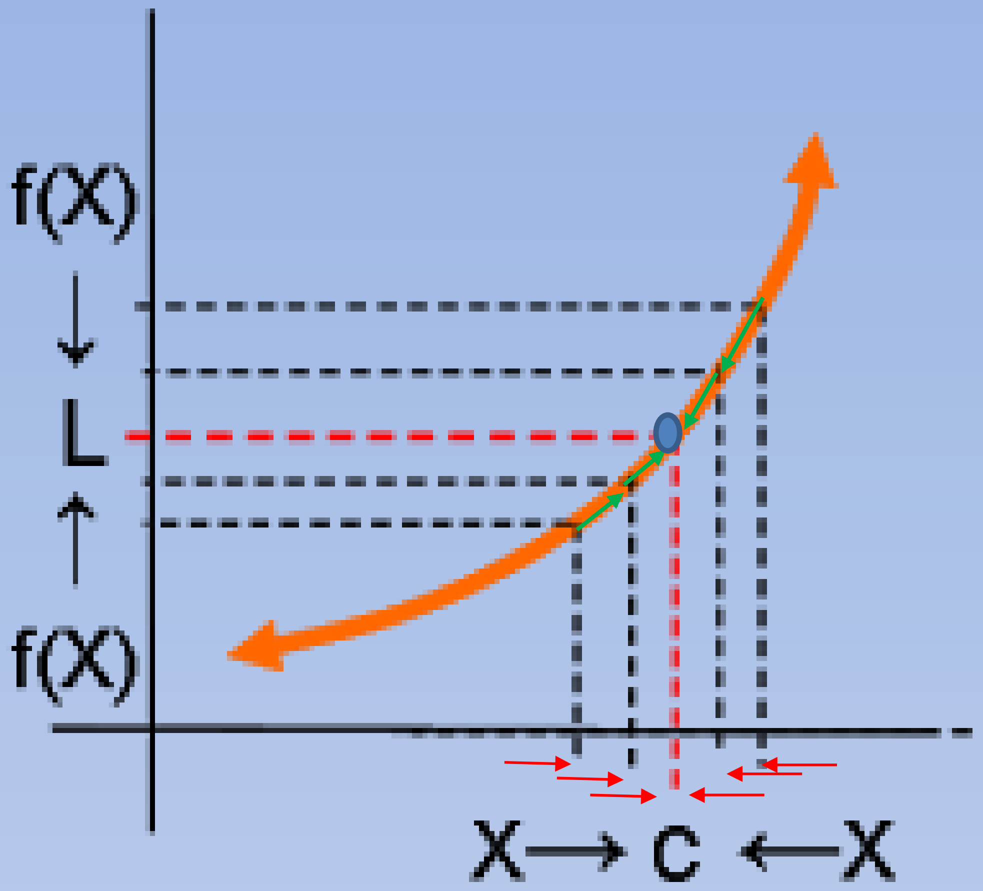
Y se denomina a^{+}, o acercarme a a por encima

- Pero realmente esta no es la cuestión a analizar.
- Lo que interesa realmente es observar es ¿qué pasa con el valor correspondiente de Y cuando X varía acercándose al valor a tanto como yo quiera?.
- ¿Será que se aproxima también a un valor fijo L?

- Ahora, es obvio por la definición de función que si le pasa algo a X, también necesariamente le debe pasar algo a Y.

- O mejor dicho, si varía X también variará Y.

- Nos interesa ¿qué le pasa justamente a Y?
- ¿Cómo varía Y?



http://3.bp.blogspot.com/_pa9SwNuusWY/THWPqCFPCYI/AAAAAAAAAKI/_NstKgYxlK4/s1600/Limite3.png

SIGNIFICADO DE FUNCIÓN GEOGEBRA

https://www.geogebra.org/m/XWWGS6ZK

UNA FUNCIÓN LINEAL

Importante: decir y es lo mismo que decir f(x)

$$y=f(x)$$

LÍMITES POR LA IZQUIERDA a^{-}

Es cuando nos acercamos a a por su lado izquierdo, o sea, para valores menores de a y se denota por a^{-}

Haremos esto tabulando los valores de la función para valores de x cada vez más cercanos al número a.

x tiende a 2 izda	f(x)
1.9	3.61
1.99	3.9601
1.999	3.996001000000001
1.99999	3.9999600001
1.999999	3.999996000001
1.9999999	3.99999960000001
1.99999999	3.99999996
1.999999999	3.999999996
1.9999999999	3.9999999996
1.99999999999	3.99999999996
2	?

https://www.geogebra.org/m/XWWGS6ZK

Podemos observar que cuando nos acercamos por la izquierda con las *x* al valor *a*, los valores de la y= f(x) se van acercando a *L=4*

x tiende a 2 dcha	f(x)
2.1	4.41
2.01	4.040099999999999
2.001	4.004001
2.00001	4.0000400001
2.000001	4.000004000001001
2.0000001	4.000000400000009
2.00000001	4.00000004
2.000000001	4.000000004
2.0000000001	4.0000000004
2.00000000001	4.00000000004
2	?

https://www.geogebra.org/m/XWWGS6ZK

- Podemos hacer que los valores de la variable *y* se acerquen al valor *L* tanto como queramos, haciendo solamente que la variable *x* se acerque por la derecha (a^+) tanto como queramos al valor *a*.

a^+ significa por el lado derecho

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

22

$$f(x) = x^2 - x + 2$$

para valores de x cercanos a 2. Las tablas siguientes dan valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2 pero no iguales a 2.

a^-

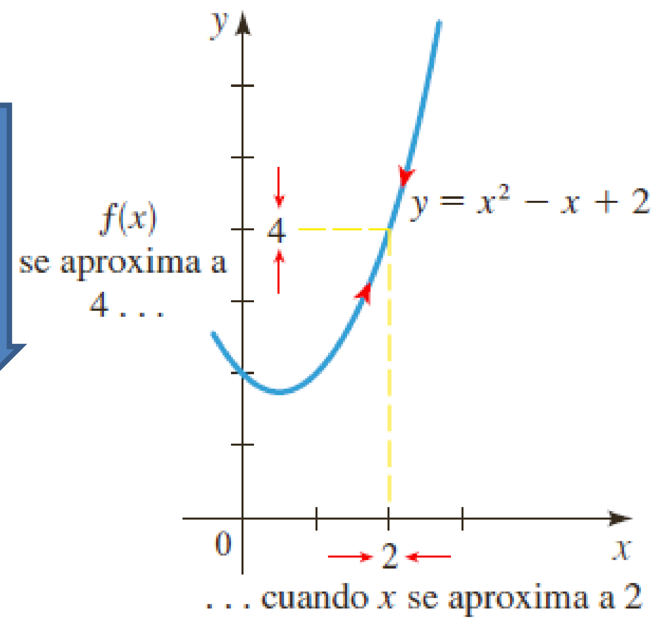
x	$f(x)$
1.0	2.000000
1.5	2.750000
1.8	3.440000
1.9	3.710000
1.95	3.852500
1.99	3.970100
1.995	3.985025
1.999	3.997001

$\Rightarrow 2 \quad \Rightarrow 4$

a^+

x	$f(x)$
3.0	8.000000
2.5	5.750000
2.2	4.640000
2.1	4.310000
2.05	4.152500
2.01	4.030100
2.005	4.015025
2.001	4.003001

$2 \Leftarrow \quad 4 \Leftarrow$



LÍMITES POR LA DERECHA:

a^{+}

- Es cuando nos acercamos a a por su lado derecho, se parte de valores mayores de a o sea, de valores que están a la derecha de a.
- Y se denomina a^{+}

- Si el límite por la izquierda no existe o si tampoco existe el límite por la derecha o si son diferentes, entonces el límite de la función en ese punto no existe.

•

Si se tiene una función y=f(x) y a es un punto que pertenece a su dominio, significa que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Siempre y cuando los límites por la parte izquierda y por la parte derecha existan y sean el mismo L.

Límite de f(x) cuando x tiende a a es L

En ningún momento nos interesamos por el valor L de f(x) cuando x=a, es decir, el número f(a). Lo único que nos interesa son los valores de la función Y=f(x)cuando x está "muy cerca" de a pero x es diferente de a.

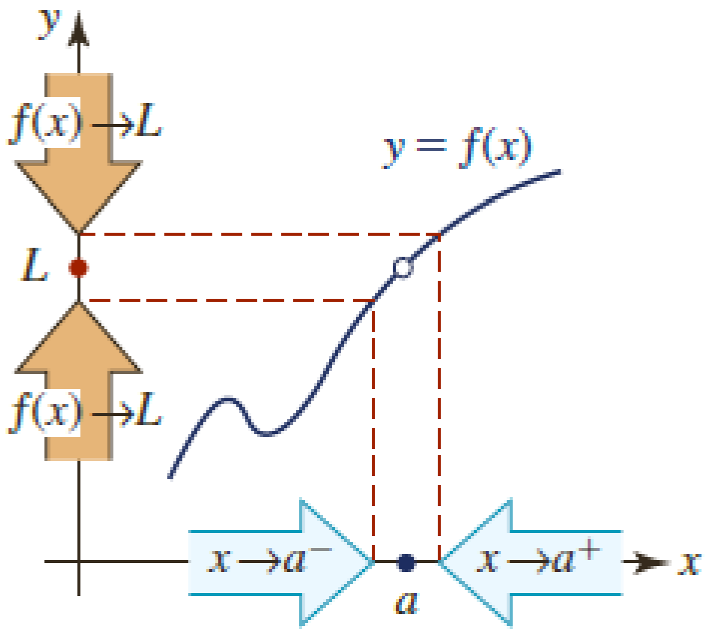
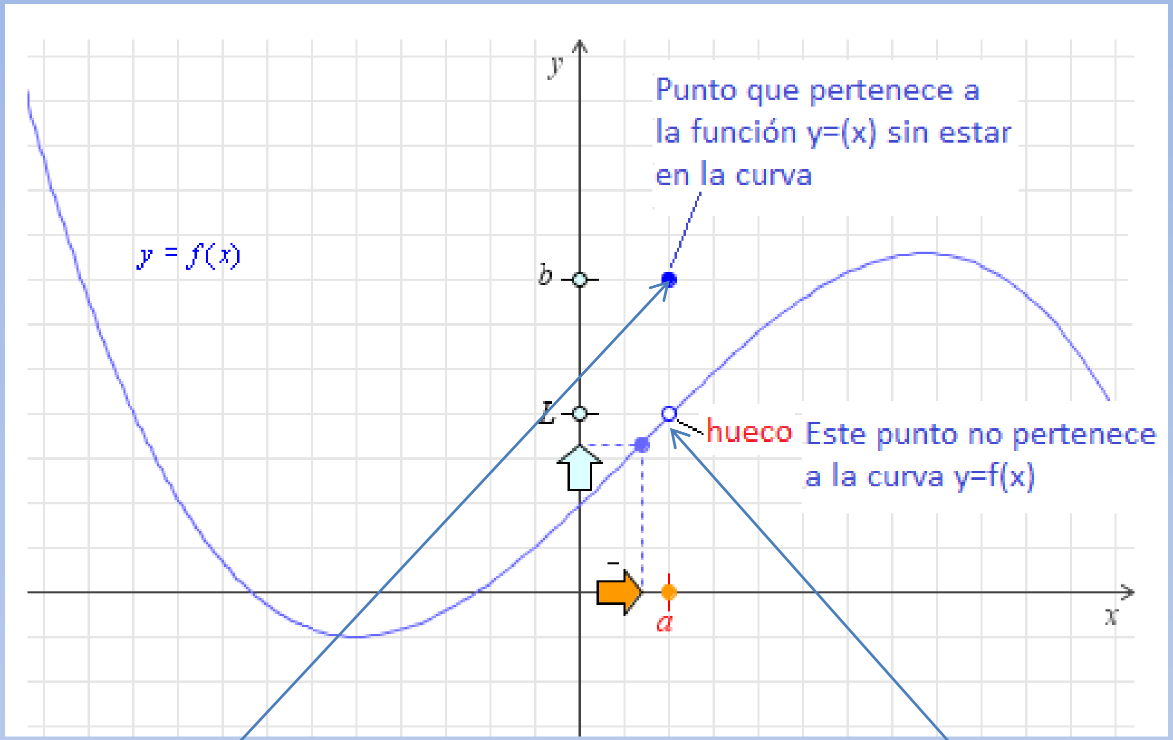


FIGURA $f(x) \to L$ cuando $x \to a$ si y sólo si $f(x) \to L$ cuando $x \to a^-$ y $f(x) \to L$ cuando $x \to a^+$

Existencia o no existencia Por supuesto, un límite (por un lado o por dos lados) no tiene por qué existir. Pero es importante no olvidar lo siguiente:

- La existencia de un límite de una función f cuando x tiende a a (desde un lado o desde ambos lados) no depende de si f está definida en a, sino sólo de si está definida para x cerca del número a.

FUNCIONES DISCONTINUAS



- La función y=f(x) no está definida en o pero si en (a,b) para un valor de x= a

Esta función es discontinua en o

- Se dice que una función tiene un "hueco" en x=a cuando no existe el valor de la función en ese punto pero si existe el límite, es decir, existen los límites laterales por ambos lados y son iguales pero no existe la función en ese punto.

Una forma indeterminada Se dice que el límite de un cociente $f(x)/g(x)$, donde tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando $x \to a$, tiene una **forma indeterminada 0/0**. El límite (7) en el análisis inicial tenía esta forma indeterminada. Muchos límites importantes, como (9) y (10), y el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

que constituye la columna vertebral del cálculo diferencial, también tienen la forma indeterminada 0/0.

Teorema 2.2.1 Dos límites fundamentales

i) $\lim_{x \to a} c = c$, donde c es una constante. El límite de una constante es la constante

ii) $\lim_{x \to a} x = a$

- El límite de x cuando x tiende a a es a.

a) $\lim_{x \to 2} 10 = 10$ y $\lim_{x \to 6} \pi = \pi$.

b) $\lim_{x \to 2} x = 2$ y $\lim_{x \to 0} x = 0$.

Basta reemplazar el valor hacia el cual tiende x para hallar su límite.

Teorema 2.2.2 Límite de una función multiplicada por una constante

Si c es una constante, entonces

$$\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x).$$

El límite de una constante por una función es igual a la constante por el límite de la función

a) $\lim_{x \to 8} 5x = 5 \lim_{x \to 8} x = 5 \cdot 8 = 40$

b) $\lim_{x \to -2} \left(-\frac{3}{2}x\right) = -\frac{3}{2} \lim_{x \to -2} x = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-2) = 3.$

Teorema 2.2.3 Límites de una suma, un producto y un cociente

Suponga que a es un número real y que $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, entonces

i) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \pm L_2$,

ii) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = L_1L_2$, y

iii) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, $L_2 \neq 0$.

- Si ambos límites existen, entonces

  i) el límite de una suma es la suma de los límites,

  ii) el límite de un producto es el producto de los límites y

  iii) el límite de un cociente es el cociente de los límites, en el supuesto que el límite del denominador no es cero.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 5}(10x + 7) &= \lim_{x\to 5} 10x + \lim_{x\to 5} 7 \\ &= 10\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 7 \\ &= 10 \cdot 5 + 7 = 57. \end{aligned}$$

Teorema 2.2.5 Un límite que no existe

Sean $\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \neq 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

no existe.

Evalúe

a) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x}{x-5}$

Solución Cada función en los tres incisos del ejemplo es racional.

a) Puesto que el límite del numerador x es 5, pero el límite del denominador $x - 5$ es 0, concluimos del teorema 2.2.5 que el límite no existe.

Evalúe

$$b)\ \lim_{x\to 5}\frac{x^2-10x+25}{x^2-4x-5}$$

Al sustituir $x=5$, tanto el denominador como el numerador se hacen iguales a 0, de modo que el límite tiene la forma indeterminada $0/0$. Por el teorema del factor del álgebra, $x-5$ es un factor tanto del numerador como del denominador. Así,

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-10x-25}{x^2-4x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)^2}{(x-5)(x+1)} \quad \leftarrow \text{se cancela el factor } x-5$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x+1}$$

$$=\frac{0}{6}=0. \quad \leftarrow \text{el límite existe}$$

Evalúe

c) $\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{x^2 - 10x + 25}$.

De nuevo, el límite tiene la forma indeterminada 0/0. Después de factorizar el denominador y cancelar los factores, por la manipulación algebraica

$$\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{x^2 - 10x + 25} = \lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{(x - 5)^2} = \lim_{x \to 5} \frac{1}{x - 5}$$

se ve que el límite no existe puesto que el límite del numerador en la última expresión ahora es 1, pero el límite del denominador es 0. ■

Teorema 2.2.4 Límites de una potencia

Sean $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y n un entero positivo. Entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n = L^n.$$

El límite de una función elevada a una potencia es igual al límite elevado a potencia

Para el caso especial $f(x) = x^n$, el resultado proporcionado en el teorema 2.2.4 produce

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n.$$

EJEMPLO

Evalúe

a) $\lim_{x\to 10} x^3$ *b*) $\lim_{x\to 4} \dfrac{5}{x^2}$.

Solución

a) Por (1),

$$\lim_{x\to 10} x^3 = 10^3 = 1\,000.$$

b) Por el teorema 2.2.1 y (1) sabemos que $\lim_{x\to 4} 5 = 5$ y $\lim_{x\to 4} x^2 = 16 \neq 0$. En consecuencia, por el teorema 2.2.3*iii*),

$$\lim_{x\to 4} \frac{5}{x^2} = \frac{\lim_{x\to 4} 5}{\lim_{x\to 4} x^2} = \frac{5}{4^2} = \frac{5}{16}.$$

EJEMPLO 6 Uso de los teoremas 2.2.3 y 2.2.4

Evalúe $\lim_{x\to 1}(3x-1)^{10}$.

Solución Primero, por el teorema 2.2.3*i*) se observa que

$$\lim_{x\to 1}(3x-1)=\lim_{x\to 1}3x-\lim_{x\to 1}1=2.$$

Luego, por el teorema 2.2.4 se concluye que

$$\lim_{x\to 1}(3x-1)^{10}=\left[\lim_{x\to 1}(3x-1)\right]^{10}=2^{10}=1\,024.$$

EJEMPLO 5 Uso del teorema 2.2.3

Evalúe $\lim_{x \to 3} (x^2 - 5x + 6)$.

Solución Debido a los teoremas 2.2.1, 2.2.2 y (1), todos los límites existen. En consecuencia, por el teorema 2.2.3*i*),

$$\lim_{x \to 3}(x^2 - 5x + 6) = \lim_{x \to 3} x^2 - \lim_{x \to 3} 5x + \lim_{x \to 3} 6 = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0.$$ ■

- Linc de lineas rectas http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/f01_propor.html
- Transformación de funciones
- http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/tf1.htm
- Derivada http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/d1derivada1p.html

- Funciones
- http://roble.pntic.mec.es/jarran2/geogebra/web/funcionlineal1.html
- Exponenciales
- http://roble.pntic.mec.es/jarran2/geogebra/web/funcionexponencial1.htm
- Geogebra
- http://geogebra.es/cvg/02/index.html

- http://jmora7.com/SB/construccion3.html
- AHORA:
- http://www.lamanzanadenewton.com/materiales/matematicas/lmn_mat_fch12.html
- http://calculoparaprincipiantes.weebly.com/liacutemites.html
- http://www.fca.unl.edu.ar/Limite/2.1%20Nocion%20Intuitiva.htm
- http://www.fca.unl.edu.ar/Limite/2.1%20Nocion%20Intuitiva.htm