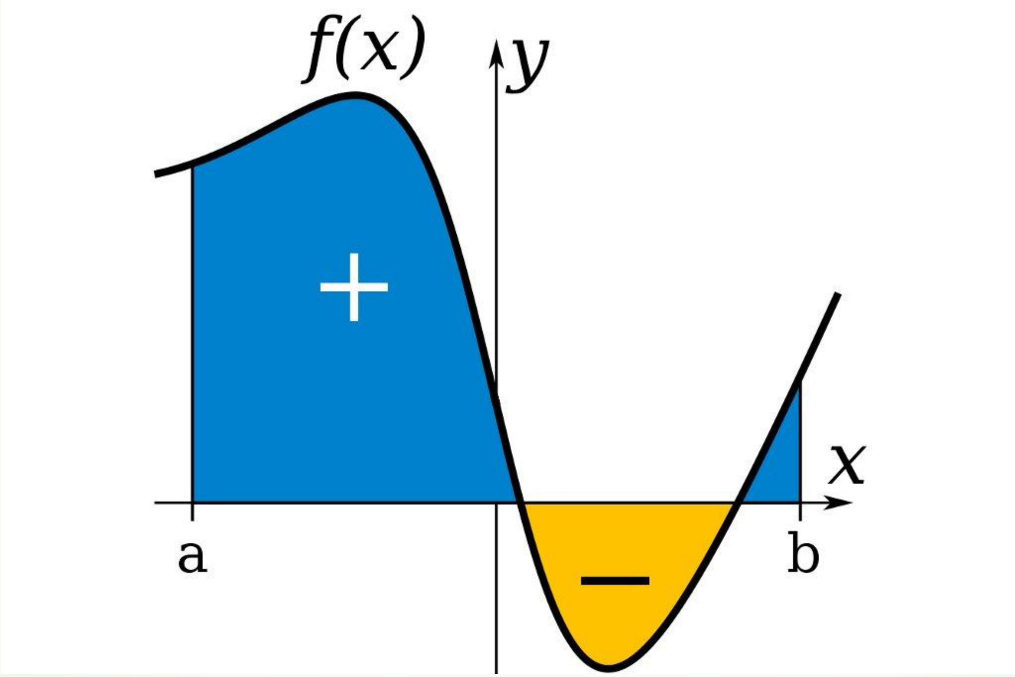
CÁLCULO DIFERENCIAL Clase 2.

Gráficos. Evaluación de una función. Combinaciones de funciones.



Elaboró Msc. Efrén Giraldo Toro.

https://www.academia.edu/12180817/Calculo._Trascendentes_Tempranas_Zill_4th.pdf

2

❖MIS VALORES

Entrega

Transparencia

Simplicidad

y Persistencia

❖MI VISIÓN: Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖MI MISIÓN: Entrega a la Voluntad Suprema. Servir a las personas.

Evaluación de funciones

Evalular una función en un valor determinado es reemplazar el valor de x en la expresión algebraica que representa la función. Si se aplica el método del cajón o paréntesis se entiende fácilmente el procedimiento:

Donde esté la x, se coloca un cajón o paréntesis, respetando el exponente que tenga la x o el radical.

Método del cajón o paréntesis (   ) para evaluar una función.

▼ Evaluación de una función

En la definición de una función, la variable independiente x desempeña el papel de un símbolo o dígito. Por ejemplo, la función $f(x) = 3x^2 + x - 5$ se puede considerar como

Donde esté la x, se coloca un cajón o paréntesis $f(\square) = 3 \cdot \square^2 + \square - 5$ **f ( ) = 3( )^2 +( ) -5**

Para evaluar f en un número, sustituimos el número por el símbolo o dígito.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

EJEMPLO 2 | Evaluación de una función

Sea $f(x) = 3x^2 + x - 5$. Evalúe cada valor de la función.

(a) $f(-2)$ (b) $f(0)$ (c) $f(4)$ (d) $f(\frac{1}{2})$

$$f(x) = y = 3(\quad)^2 + (\quad) - 5$$

EJEMPLO 2 | Evaluación de una función

Sea $f(x) = 3x^2 + x - 5$. Evalúe cada valor de la función.

(a) $f(-2)$ **(b)** $f(0)$ **(c)** $f(4)$ **(d)** $f\left(\frac{1}{2}\right)$

SOLUCIÓN Para evaluar f en un número, sustituimos el número por x en la definición de f.

(a) $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5 = 5$

(b) $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 0 - 5 = -5$

(c) $f(4) = 3 \cdot (4)^2 + 4 - 5 = 47$

(d) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 5 = -\frac{15}{4}$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Evalúe la siguientes funciones

22. $h(t) = t + \frac{1}{t};$

$h(1), h(-1), h(2), h(\frac{1}{2}), h(x), h\left(\frac{1}{x}\right)$

23. $f(x) = 2x^2 + 3x - 4;$

$f(0), f(2), f(-2), f(\sqrt{2}), f(x+1), f(-x)$

24. $f(x) = x^3 - 4x^2;$

$f(0), f(1), f(-1), f(\frac{3}{2}), f\left(\frac{x}{2}\right), f(x^2)$

25. $f(x) = 2|x - 1|;$

$f(-2), f(0), f(\frac{1}{2}), f(2), f(x+1), f(x^2+2)$

26. $f(x) = \frac{|x|}{x};$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

$f(\ ) = \ 2(\ \ )^2 - 5(\ ) + 1$

EJEMPLO 3 Si $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ y $h \neq 0$, evalúe $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

SOLUCIÓN Primero evaluamos $f(a+h)$ reemplazando x por $a + h$ en la expresión para $f(x)$:

Evaluar $a + h$

$$f(a+h) = 2(a+h)^2 - 5(a+h) + 1$$

$$= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5(a+h) + 1$$

$$= 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1$$

Luego a: $2(a)^2 - 5(a) + 1$

Después sustituimos en la expresión dada y simplificamos:

Posteriormente se reemplaza todo

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1) - (2a^2 - 5a + 1)}{h}$$

$$= \frac{2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 - 2a^2 + 5a - 1}{h}$$

Se simplifica:

$$= \frac{4ah + 2h^2 - 5h}{h} = 4a + 2h - 5$$

Función Potencia

Funciones potencia Una función de la forma

$$f(x) = x^n \tag{1}$$

se denomina **función potencia**. En esta sección consideraremos que n es un número racional. El dominio de la función potencia depende de la potencia n. Por ejemplo, para $n = 2$, $n = \frac{1}{2}$ y $n = -1$, respectivamente,

- el dominio de $f(x) = x^2$ es el conjunto R de números reales o $(-\infty, \infty)$,
- el dominio de $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$,
- el dominio de $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ es el conjunto R de números reales excepto $x = 0$.

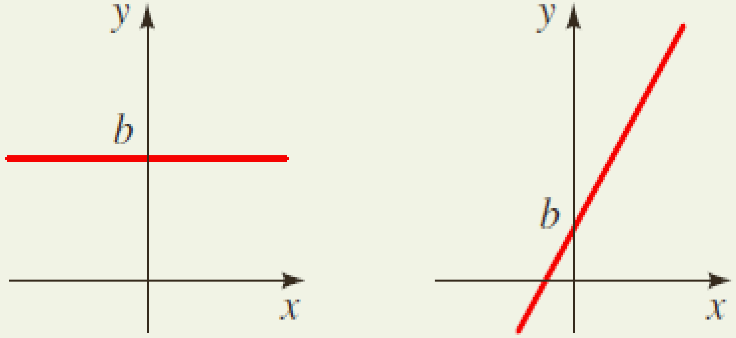
Las funciones potencia simples, o versiones modificadas de estas funciones, ocurren tan a menudo en problemas en cálculo que no es conveniente desperdiciar tiempo valioso trazando sus gráficas. Se sugiere conocer (memorizar) el breve catálogo de gráficas de funciones potencia que se proporciona en la FIGURA 1.2.1. Usted debe reconocer la gráfica en el inciso *a*) de la figura 1.2.1 como una **recta** y la gráfica en el inciso *b*) como una **parábola**.

ALGUNAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

Funciones lineales

$f(x) = mx + b$

$y = b$

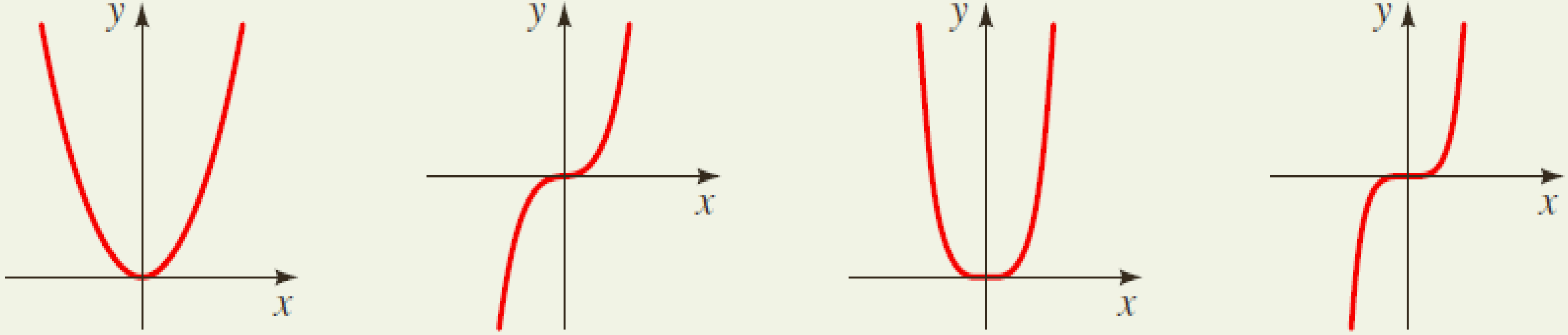


$f(x) = b$ $\quad$ $f(x) = mx + b$

Funciones potencia

$f(x) = x^n$

Función Potencia

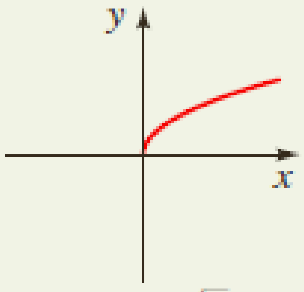


$f(x) = x^2$ $\quad$ $f(x) = x^3$ $\quad$ $f(x) = x^4$ $\quad$ $f(x) = x^5$

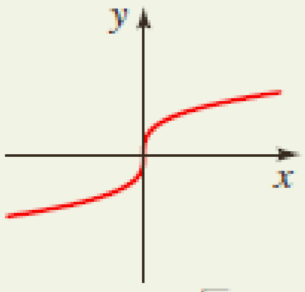
(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Funciones raíz Función Potencia

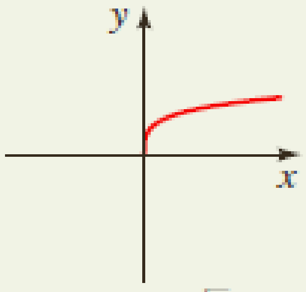
$f(x) = \sqrt[n]{x}$



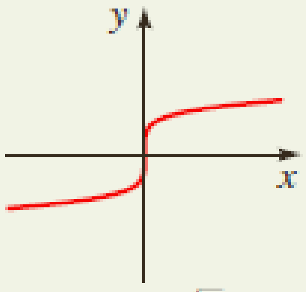
$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$



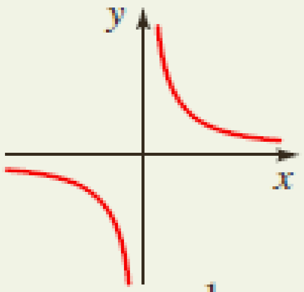
$f(x) = \sqrt[4]{x}$



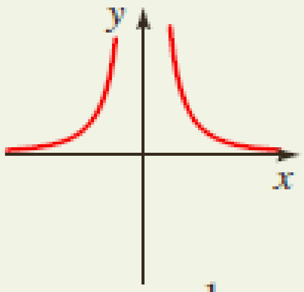
$f(x) = \sqrt[5]{x}$

Funciones recíprocas

$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ Función Potencia



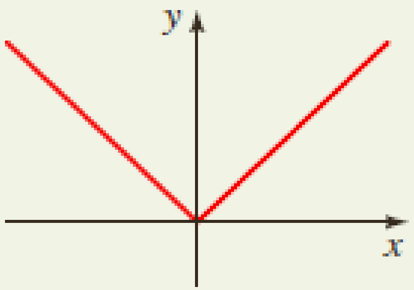
$f(x) = \dfrac{1}{x}$



$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Función valor absoluto

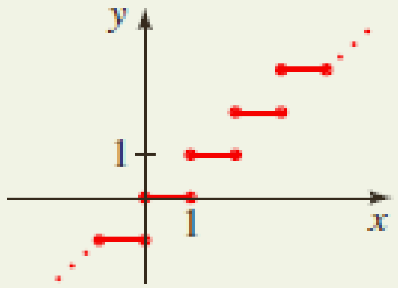
$f(x) = |x|$



$f(x) = |x|$

Función entero mayor

$f(x) = [\![x]\!]$



$f(x) = [\![x]\!]$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Combinación de funciones (Precálculo Stewart p:214)

Dos funciones f y g pueden combinarse en varias formas para obtener nuevas funciones. En esta sesión se analizarán dos formas en que es posible combinar funciones:

- Mediante operaciones aritméticas
- A través de la operación de composición de funciones.

Combinaciones aritméticas

Dos funciones pueden combinarse por medio de las cuatro conocidas operaciones aritméticas de:

Suma,
Resta,
Multiplicación
División.

Suma de dos funciones $f(x) + g(x) = (f+g)(x)$

■ **Dominio de una combinación aritmética** Al combinar dos funciones aritméticamente es necesario que ambas f y g estén definidas en el mismo número x. Por tanto, el **dominio** de las funciones $f+g$, $f-g$ y fg es el conjunto de números reales que son *comunes* a ambos dominios; es decir, el dominio es la *intersección* del dominio de f con el dominio de g.

Lo cual significa que la función suma de dos funciones $(f+g)(x)$ se obtiene sencillamente sumando las expresiones que conforman las dos funciones y hallando la intersección de sus dominios. Lo mismo para las otras operaciones con funciones.

(Zill, Warrent, Wrigth, 2011)

ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Sean f y g funciones con dominios A y B. Entonces las funciones $f+g$, $f-g$, fg y f/g están definidas como sigue.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ Dominio $A \cap B$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ Dominio $A \cap B$

$(fg)(x) = f(x)g(x)$ Dominio $A \cap B$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ Dominio $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$

Por tanto, el **dominio** de las funciones *f*, *g*, *f – g*, y *fg* es el conjunto de números reales que son *comunes* a ambos dominios. O sencillamente se analiza el dominio de la expresión resultante.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

EJEMPLO 2 Suma, diferencias, producto y cociente

Considere las funciones polinomiales $f(x) = x^2 + 4x$ y $g(x) = x^2 - 9$.

a) Con base en los numerales (2)-(4) de la definición 1.2.1 es posible producir tres nuevas funciones polinomiales:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 + 4x) + (x^2 - 9) = 2x^2 + 4x - 9,$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 + 4x) - (x^2 - 9) = 4x + 9,$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x^2 + 4x)(x^2 - 9) = x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 36x.$$

b) Finalmente, con base en el numeral (5) de la definición 1.2.1,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 9}.$$

■

Observe en el ejemplo 2, puesto que $g(-3) = 0$ y $g(3) = 0$, que el dominio del cociente $(f/g)(x)$ es $(-\infty, \infty)$ con $x = 3$ y $x = -3$ excluidos; en otras palabras, el dominio de $(f/g)(x)$ es la unión de tres intervalos: $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$.

(Zill, Warrent, Wrigth, 2011)

En el caso del cociente f/g, el dominio también es la intersección de los dos dominios, *pero* es necesario excluir cualquier valor de x para el que el denominador $g(x)$ sea cero.

Si el dominio de f es el conjunto X_1 y el dominio de g es el conjunto X_2, entonces el dominio de $f+g$, $f-g$, fg es $\boldsymbol{X_1 \cap X_2}$ y en el caso de f/g *estarán* excluidos los valores que hagan 0 el denominador.

y= $\dfrac{x^2+4x}{x^2-9}$.

Funciones racionales La función en el inciso *b*) del ejemplo 2 es un caso de funciones racionales. En general, una **función racional** $y = f(x)$ es una función de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \tag{7}$$

donde p y q son funciones polinomiales. Por ejemplo, las funciones

$$y = \frac{x}{x^2+5}, \quad y = \frac{\overset{\text{polinomio}}{\overset{\downarrow}{x^3 - x + 7}}}{\underset{\underset{\text{polinomio}}{\uparrow}}{x+3}}, \quad y = \frac{1}{x},$$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

EJEMPLO 1 | Combinaciones de funciones y sus dominios

Sea $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ $\quad g(x) = \sqrt{x}$

(a) Encuentre las funciones $f + g$, $f - g$, fg, y f/g y sus dominios.

(b) Encuentre $(f + g)(4)$, $(f - g)(4)$, $(fg)(4)$, y $(f/g)(4)$.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

SOLUCIÓN

(a) El dominio de f es $\{x \mid x \neq 2\}$, y el dominio de g es $\{x \mid x \geq 0\}$. La intersección de los dominios de f y g es

$$\{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\} = [0, 2) \cup (2, \infty)$$

Por lo tanto, tenemos

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \boxed{\frac{1}{x - 2} + \sqrt{x}} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x - 2} - \sqrt{x} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x > 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

Observe que en el dominio de f/g excluimos 0 porque $g(0) = 0$.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

(b) Cada uno de estos valores existe porque $x = 4$ está en el dominio de cada función.

$$(f+g)(4) = f(4) + g(4) = \frac{1}{4-2} + \sqrt{4} = \frac{5}{2}$$

$$(f-g)(4) = f(4) - g(4) = \frac{1}{4-2} - \sqrt{4} = -\frac{3}{2}$$

$$(fg)(4) = f(4)g(4) = \left(\frac{1}{4-2}\right)\sqrt{4} = 1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{f(4)}{g(4)} = \frac{1}{(4-2)\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

AHORA HAGA LOS EJERCICIOS SIGUEINTES:

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

HABILIDADES

5-10 ■ Encuentre $f + g$, $f - g$, fg y f/g y sus dominios.

7. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $\quad g(x) = \sqrt{1 + x}$

10. $f(x) = \dfrac{2}{x + 1}$, $\quad g(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

EJEMPLO 1 Suma de dos funciones potencia

Ya se ha visto que el dominio de $f(x) = x^2$ es el conjunto R de números reales, o $(-\infty, \infty)$, y el dominio de $g(x) = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$. En consecuencia, el dominio de la suma

$$f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{x}$$

es la intersección de los dos dominios: $(-\infty, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$. ■

(Zill, Warrent, Wrigth, 2011)

Composición de funciones: Método del cajón o paréntesis

$$f.g\ (x)=(f.g)\ (x)$$

$$g.f\ (x)=(g.f)\ (x)$$

Par obtener la composición de dos funciones: se coloca la primera función y donde este o estén las x la reemplazo por un cajón o paréntesis, seguidamente coloco o inserto la expresión algebraica de la segunda función.
En realidad es evaluar una función con otra.

Dadas las funciones f y g, hallar $f.g\ (x)$ y $g.f\ (x)$

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = x^3$$

La función que aparece primero en este caso f hace de cajón: donde este la x se coloca un cajón o paréntesis.

Y donde esté el cajón coloca la expresión de la segunda función respetando el exponente o la raíz si existe.

$f(x) = 2x + 1$
$g(x) = x^3$

$f.g\ (x)$	$g.f\ (x)$
$f(x) = 2x + 1$	$g(x) = x^3$ $\quad g(x) = \quad ^3$
$f(x) = 2(\quad) + 1$	$g.f\ (x) = \quad ^3 = (\quad)^3$
En el cajón entro la expresión $g(x)$ o sea x^3	Y en el cajón entro toda la expresión de la $f(x)$ o sea $2x^3 + 1$
$f.g(x) = 2\ (x^3) + 1 = 2x^3 + 1$	$g.f\ (x) = (2x^3 + 1)^3$

EJEMPLO 3 composiciones

Si $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = 2x^2 + 1$, encuentre

a) $(f \circ g)(x)$

(Zill, Warrent, Wrigth, 2011)

$$f(x) = x^2 + 3x \qquad g(x) = 2x^2 + 1$$

Aplico el cajón

$$f(x) = (\quad)^2 + 3(\quad)$$

Solución

***a*)** Para hacer énfasis se sustituye x por el conjunto de paréntesis ( ) y f se escribe en la forma $f(x) = (\ \ )^2 + 3(\ \ )$. Entonces, para evaluar $(f \circ g)(x)$, cada conjunto de paréntesis se llena con $g(x)$. Se encuentra

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = f(g(x)) &= f(2x^2 + 1)\\ &= (2x^2 + 1)^2 + 3(2x^2 + 1)\\ &= 4x^4 + 4x^2 + 1 + 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot 1\\ &= 4x^4 + 10x^2 + 4.\end{aligned}$$

(Zill, Warrent, Wrigth, 2011)

$$f(x) = x^2 + 3x \qquad g(x) = 2x^2 + 1$$

$$g.f(x) = ?$$

En este caso, g se escribe en la forma $g(x) = 2(\ )^2 + 1$. Así,

$$\begin{aligned} g.f(x) &= 2(x^2 + 3x)^2 + 1 \\ &= 2(x^4 + 6x^3 + 9x^2) + 1 \\ &= 2x^4 + 12x^3 + 18x^2 + 1. \end{aligned}$$

(Zill, Warrent, Wrigth, 2011)

EJEMPLO 4 Escritura de una función como una composición

Exprese $F(x) = \sqrt{6x^3 + 8}$ como la composición de dos funciones f y g.

Solución Si f y g se definen como $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 6x^3 + 8$, entonces

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(6x^3 + 8) = \sqrt{6x^3 + 8}.$$ ■

Hay otras dos soluciones para el ejemplo 4. Por ejemplo, si las funciones f y g se definen por $f(x) = \sqrt{6x + 8}$ y $g(x) = x^3$, observe entonces que $(f \circ g)(x) = f(x^3) = \sqrt{6x^3 + 8}$.

(Zill, Warrent, Wrigth, 2011)

EJEMPLO 4 | Hallar la composición de funciones

Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encuentre las siguientes funciones y sus dominios.

(a) $f \circ g$ **(b)** $g \circ f$ **(c)** $f \circ f$ **(d)** $g \circ g$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

SOLUCIÓN

(a) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ Definición de $f \circ g$

$= f(\sqrt{2-x})$ Definición de g

$= \sqrt{\sqrt{2-x}}$ Definición de f

$= \sqrt[4]{2-x}$

El dominio de $f \circ g$ es $\{x \mid 2 - x \geq 0\} = \{x \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$.

(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ Definición de $g \circ f$

$= g(\sqrt{x})$ Definición de f

$= \sqrt{2 - \sqrt{x}}$ Definición de g

Para que $\sqrt{x}$ esté definida, debemos tener $\boxed{x \geq 0.}$ Para que $\sqrt{\boxed{2 - \sqrt{x}}}$ esté definida, debemos tener $2 - \sqrt{x} \geq 0$, es decir, $\boxed{\sqrt{x} \leq 2,}$ o $\boxed{x \leq 4.}$ Entonces, tenemos $0 \leq x \leq 4$ de modo que el dominio de $g \circ f$ es el intervalo cerrado $[0, 4]$.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

3.

(c) $(f \circ f)(x) = f(f(x))$ Definición de $f \circ f$

$= f(\sqrt{x})$ Definición de f

$= \sqrt{\sqrt{x}}$ Definición de f

$= \sqrt[4]{x}$

El dominio de $f \circ f$ es $[0, \infty)$.

(d) $(g \circ g)(x) = g(g(x))$ Definición de $g \circ g$

$= g(\sqrt{2 - x})$ Definición de g

$= \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$ Definición de g

Esta expresión está definida cuando $2 - x \geq 0$ y $2 - \sqrt{2 - x} \geq 0$. La primera desigualdad quiere decir que $x \leq 2$, y la segunda es equivalente a $\sqrt{2 - x} \leq 2$, o $2 - x \leq 4$, o $x \geq -2$. Por tanto, $-2 \leq x \leq 2$, de modo que el dominio de $g \circ g$ es $[-2, 2]$.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)