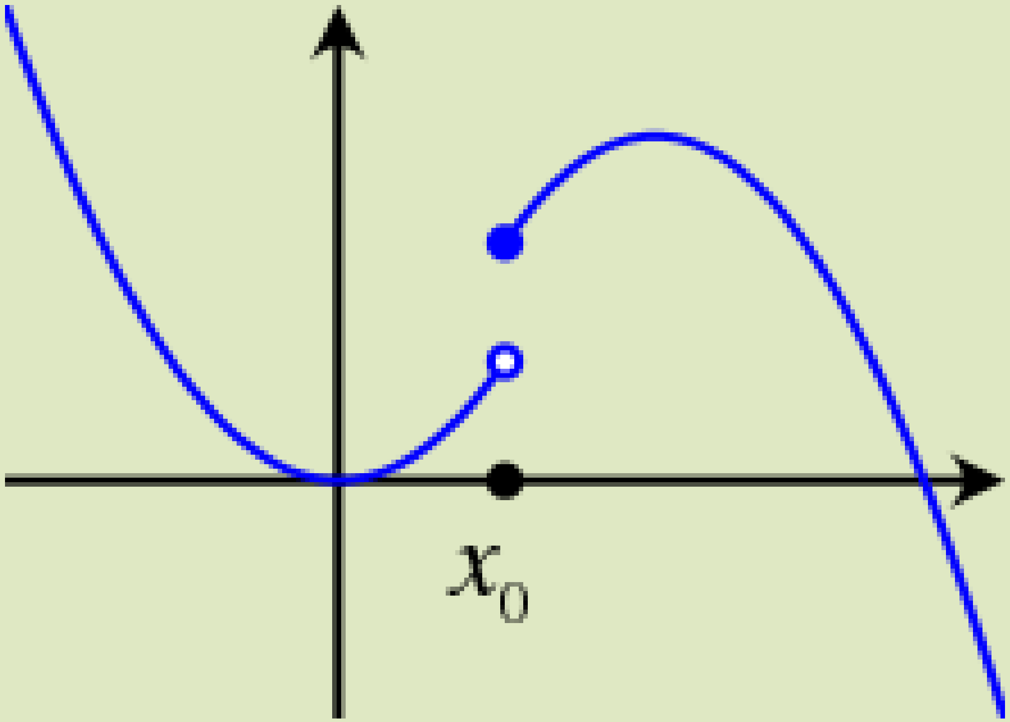
CÁLCULO DIFERENCIAL. CLASE 2.

Funciones por intervalos, tramos, pasos o saltos.



Elaboró Msc. Efrén Giraldo Toro.

2 ❖MIS VALORES

Entrega

Transparencia

Simplicidad

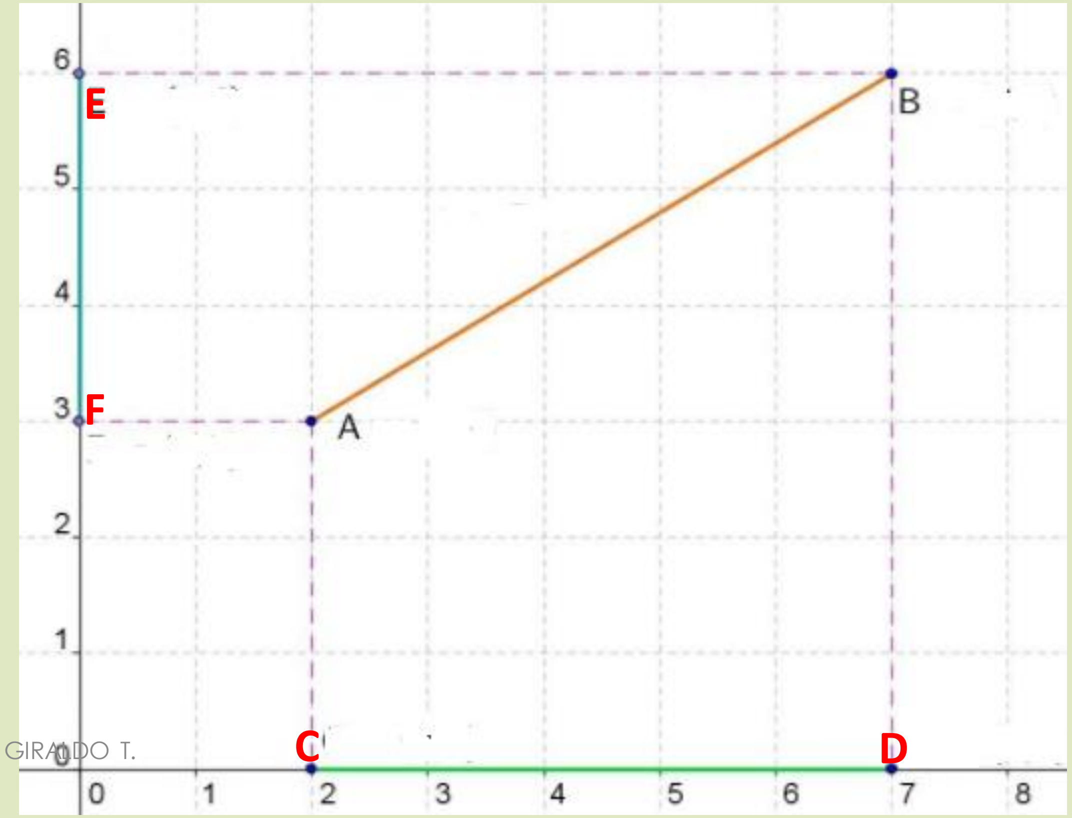
y Persistencia

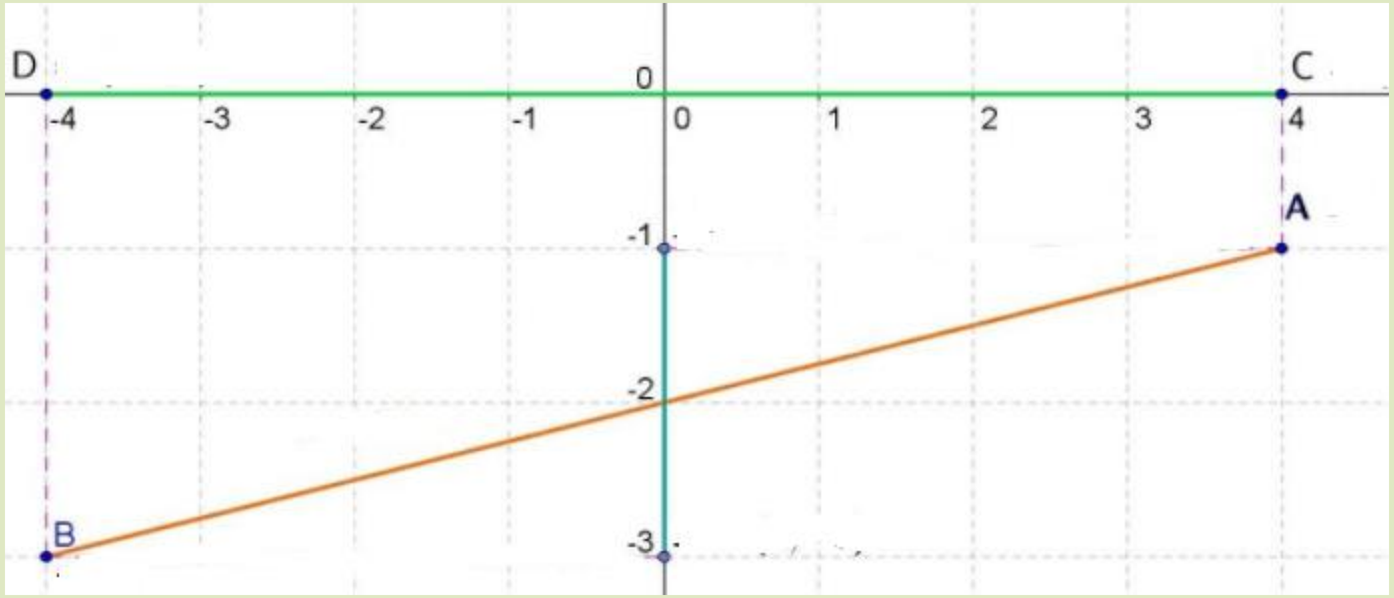
❖MI VISIÓN: Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖MI MISIÓN: Entrega a la Voluntad Suprema. Servir a las personas.

Antes de entrar en materia es bueno entender algunos conceptos:

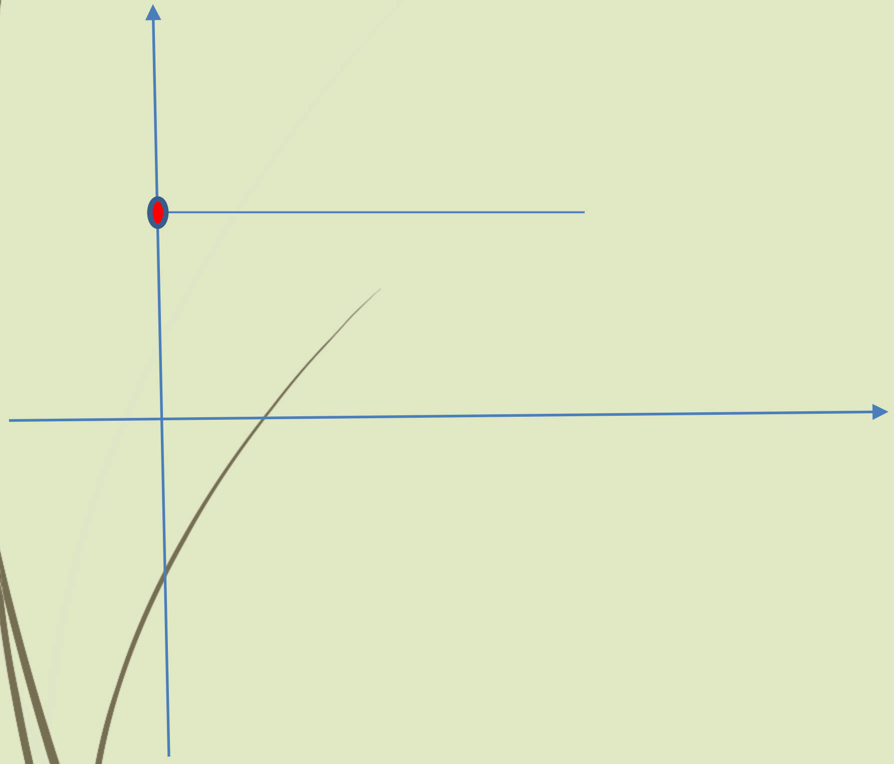
Proyección de un segmento AB sobre el eje x. Se trazan perpendiculares AC y BD desde los extremos hasta el eje x. La proyección es el segmento CD. Si es sobre el eje y, se trazan perpendiculares al eje y: BE y AF, la proyección sobre el eje y de AB es FE.

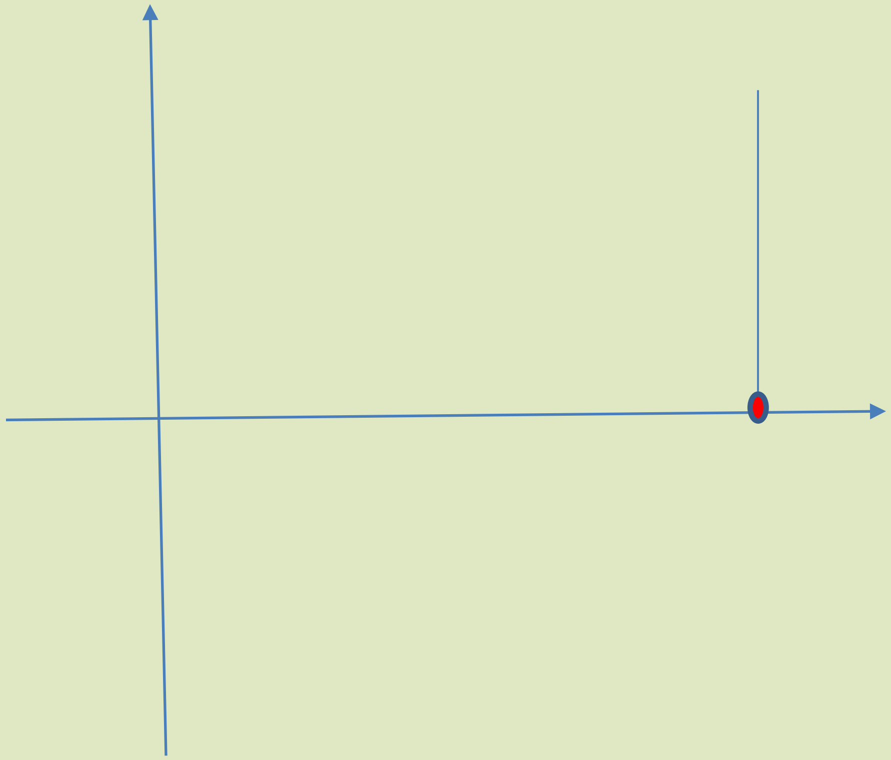




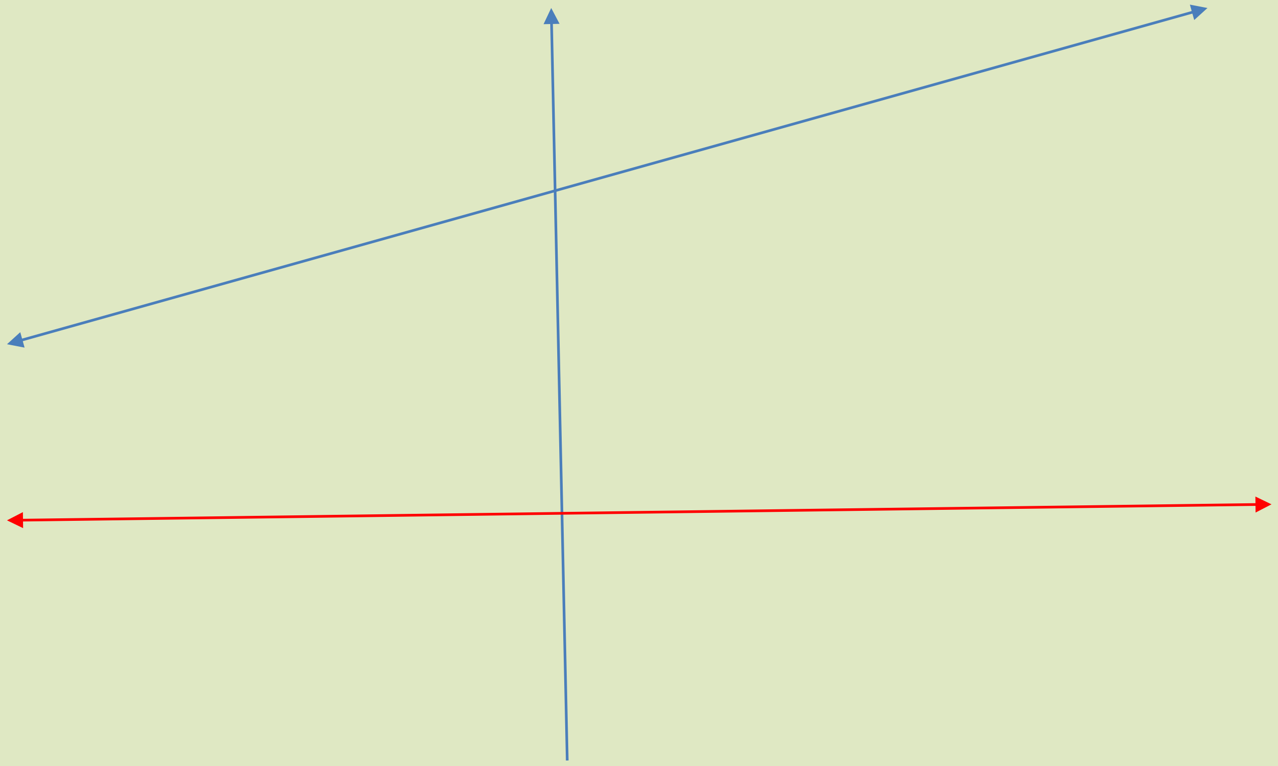
Igual pasa si el segmento o la recta están por debajo del eje x:
La proyección del segmento BA es DC.

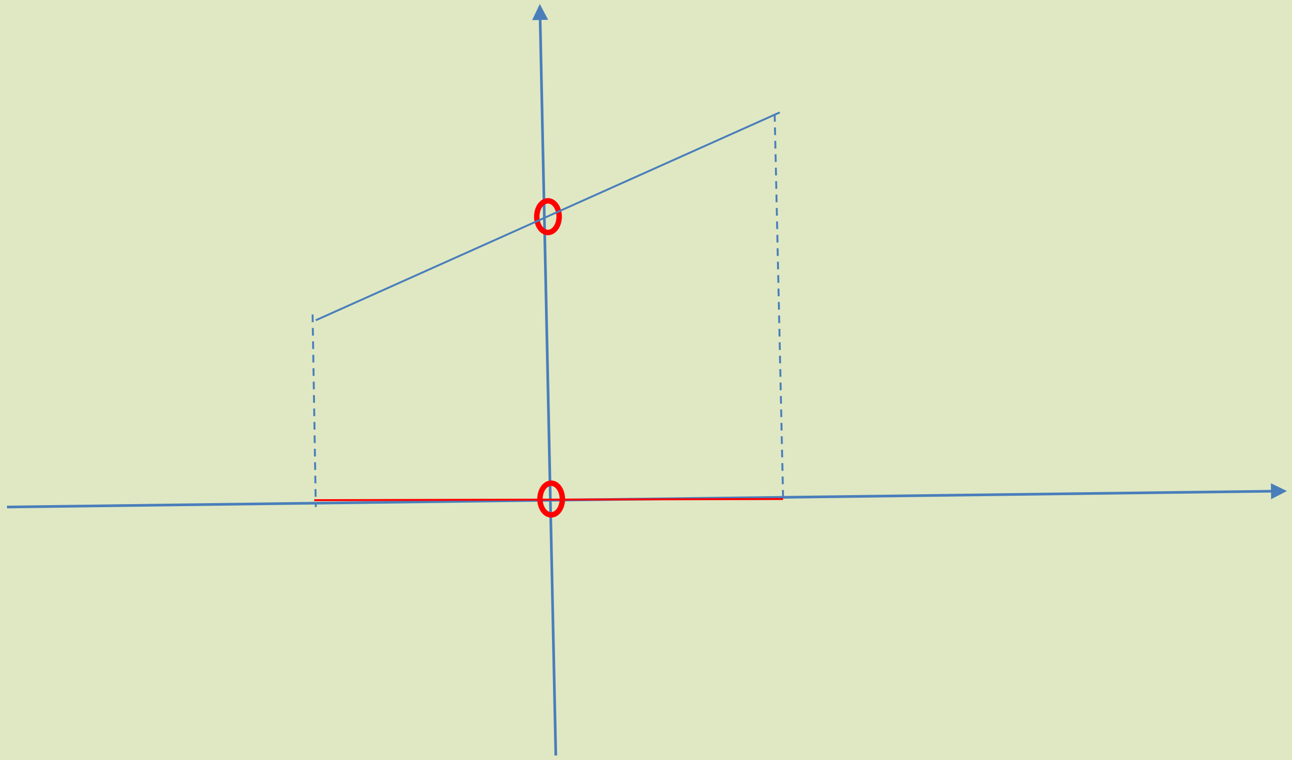
Si el segmento o la recta es paralela al eje x (perpendicular al eje y), la proyección sobre el eje y es un único punto. Y lo mismo si es paralela al eje y.



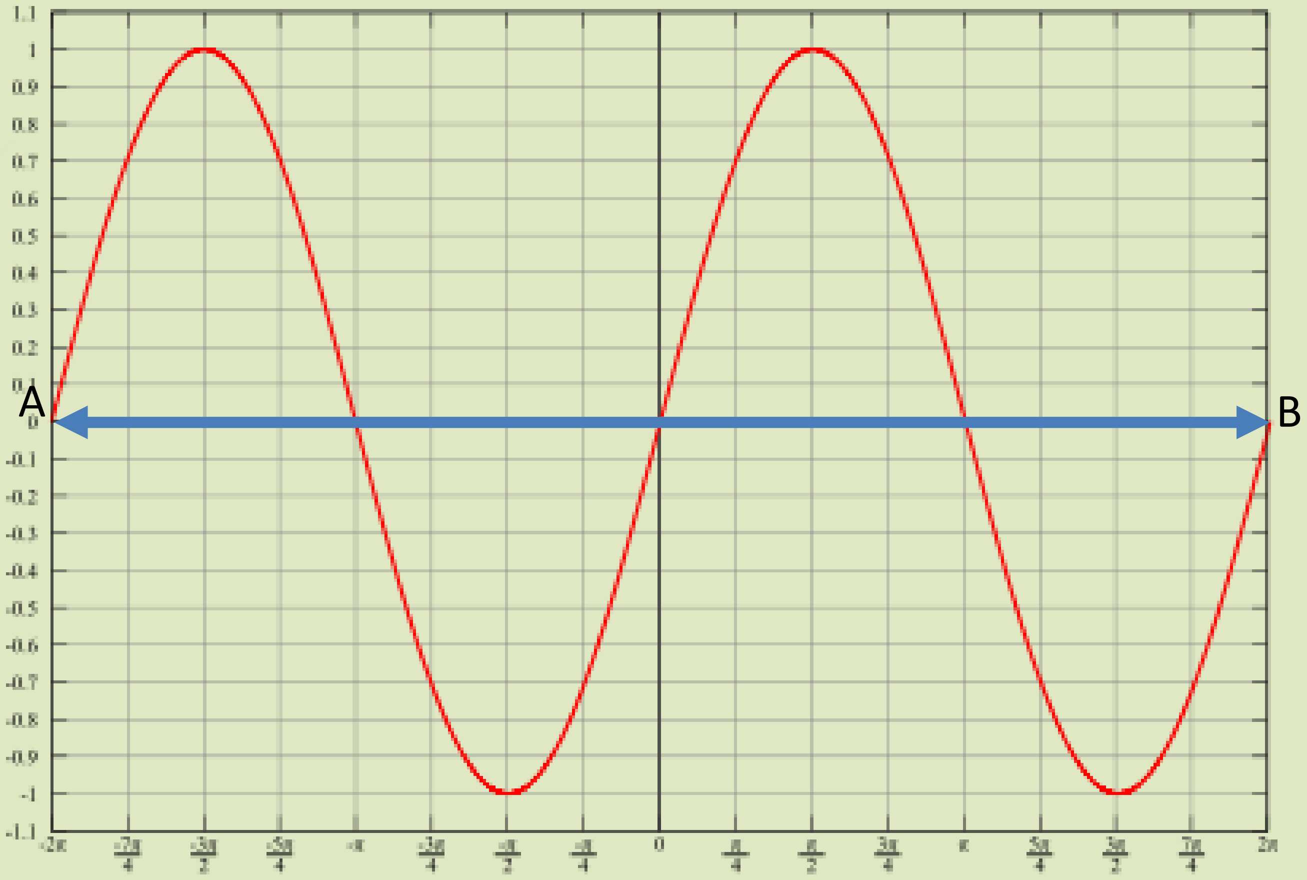


Si es una línea recta la proyección será todo el eje x, o todo el eje y.





Si al segmento le falta algún punto, a la proyección también.

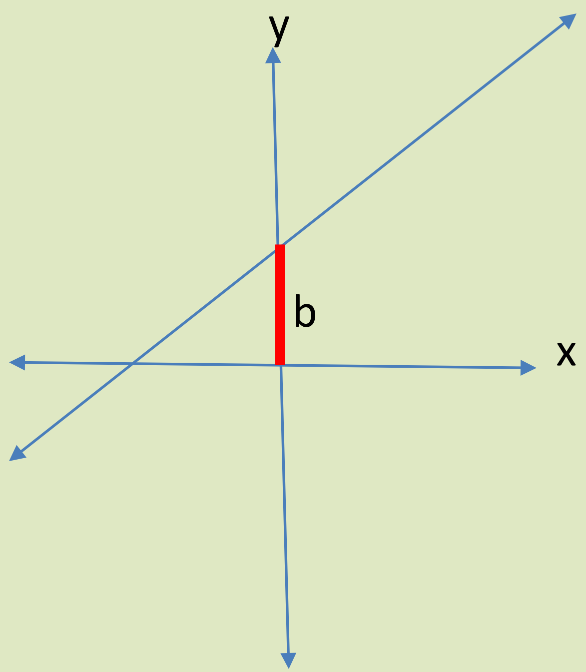


En el c aso de una curva, si la curva es infinita, su proyección es todo el eje x, si está limitada por los puntos AB, es el segmento AB sobre el eje x.

Las proyecciones sobre los ejes x e y son importantes porque determinan el dominio y el rango de una función a partir del gráfico.

Una función lineal puede presentar comúnmente esta forma:

$$y = mx + b$$



m es la pendiente
B es la intercepción con el eje y

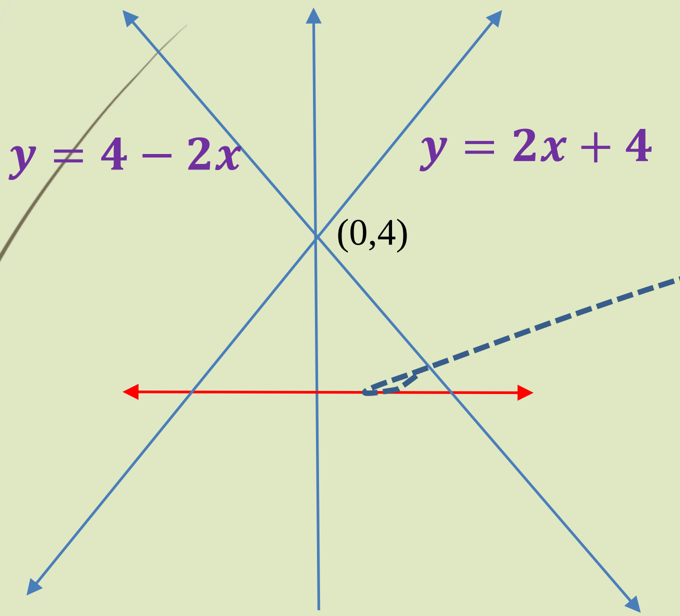
Analicemos la función f(x) que está compuesta de dos funciones sin limitaciones.

$$f(x) = \begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = \ 4 - 2x \end{cases}$$

Línea recta con pendiente positiva +2 (inclinada a la derecha) e intercepto en eje y =4

Línea recta con pendiente negativa -2(inclinada a la izquierda) e intercepto en eje y =4

Escriba aquí la ecuación.



El Dominio son todos los reales

D: $\left\{ x / \ x \ \varepsilon \ R \right. \longrightarrow (-\propto, \propto)$

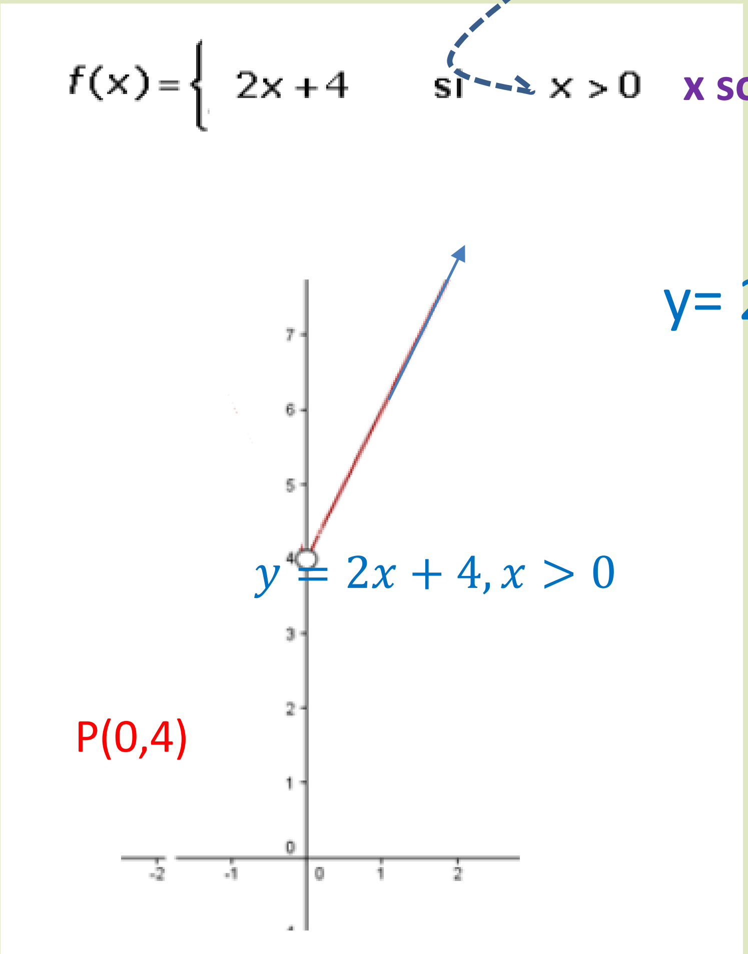
Considere la función definida por partes

$$y=f(x) = \begin{cases} -1, & \leftarrow \quad x < 0 \\ 0, & \leftarrow \quad x = 0 \\ x + 1, & \leftarrow \quad x > 0. \end{cases}$$

Para entender estas funciones es mejor leerlas de derecha a izquierda:

Si x es mayor que cero entonces $y=f(x)=x+1$.

Una función lineal con limitaciones $y = 2x + 4 \quad si\ x > 0$

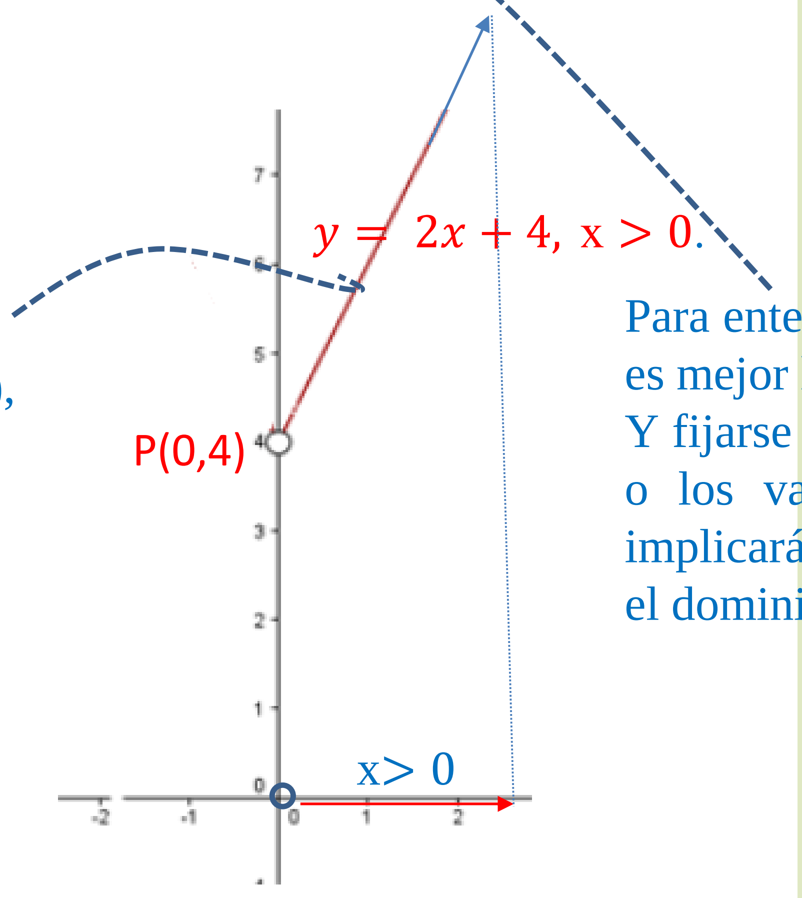


x solo puede tomar valores mayores que cero

y= 2x +4 → si x=0 → y=4 → P(0,4)

Al establecer la condición $x > 0$, estoy limitando la recta a solo la parte del primer cuadrante (parte positiva de x), sin incluir el 0 para x y el 4 para y.

$$y = f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

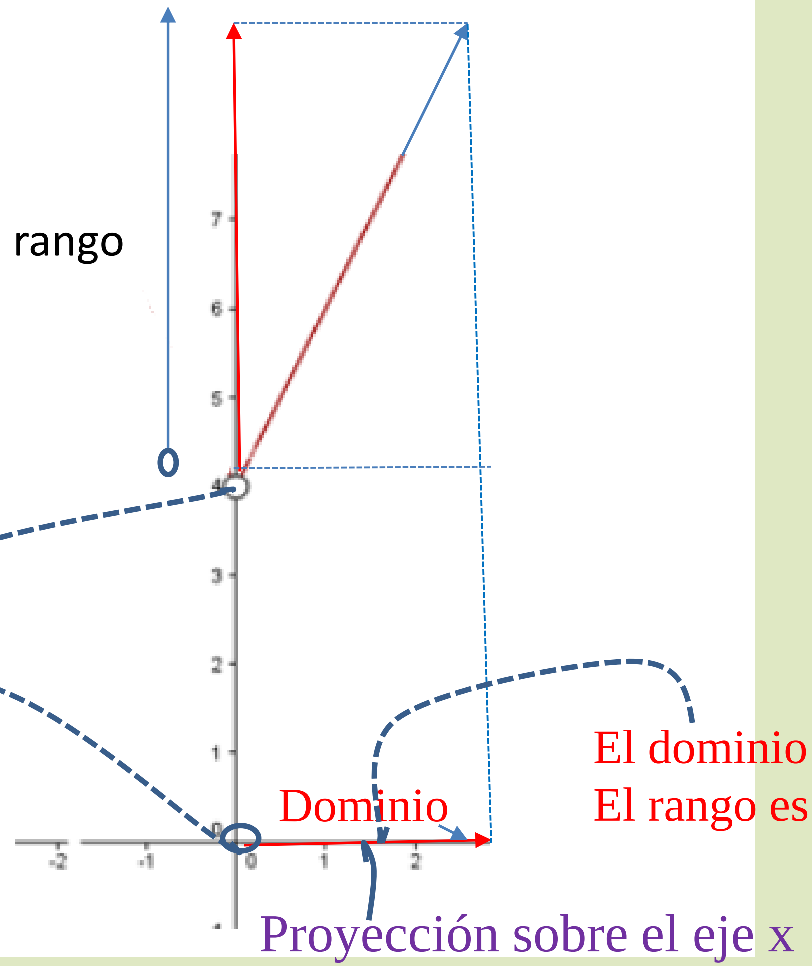


$f(x) = y = 2x + 4$ es una recta con pendiente +2 (inclinación a la derecha), limitada o recortada por la restricción de la variable independiente x: x> 0.

Para entender más fácil este tipo de función es mejor leerlo de derecha a izquierda.

Y fijarse en el eje x lo qué implica el valor o los valores de x. Por ejemplo, x> 0 implicará el eje x +, sin el punto cero para el dominio.

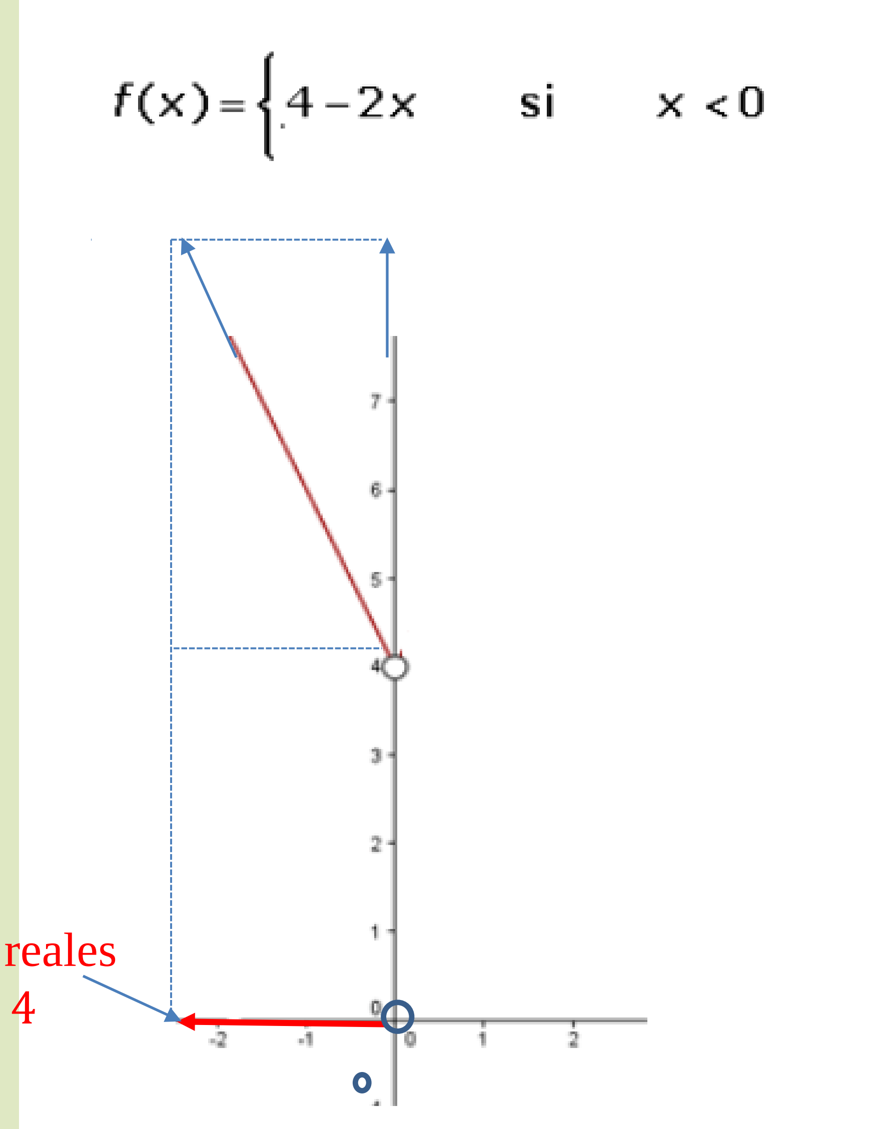
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 \leftarrow \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$



No coge ese extremo

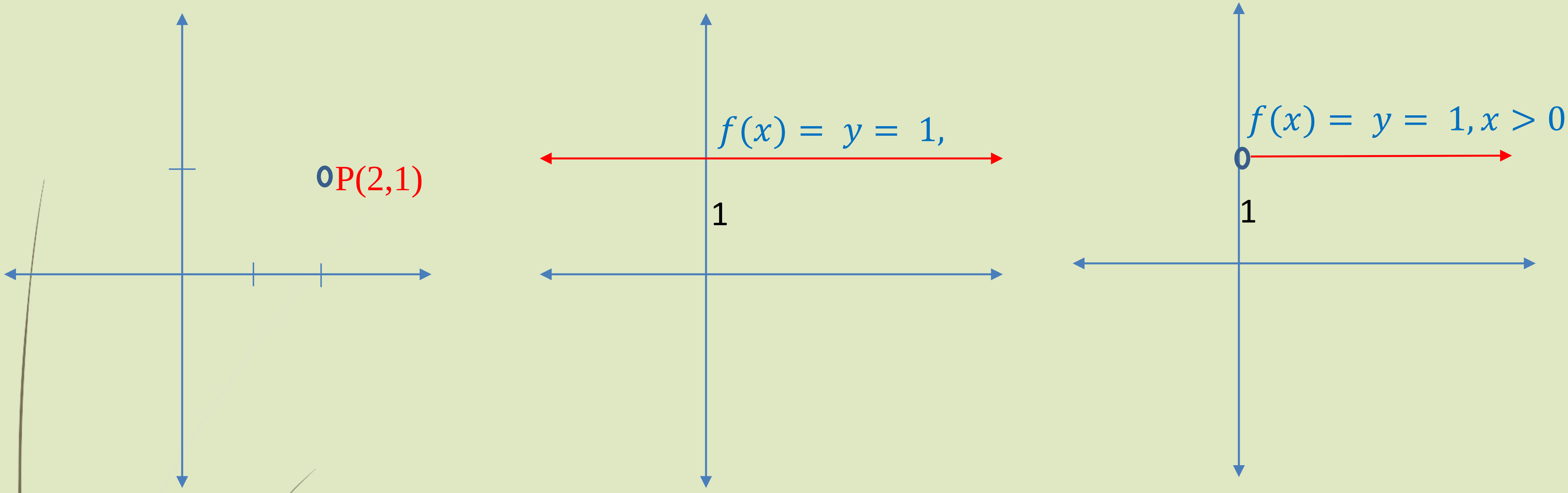
El dominio es el conjunto de los reales tales que x> 0
El rango es $y > 4$

Dominio: Proyección sobre el eje x



El dominio es el conjunto de los reales tales que x< 0. El rango es $y > 4$

$f(x) = y = 4 - 2x$ es una recta con pendiente negativa (-2) (inclinación a la izquierda), limitada o recortada por la restricción de la variable independiente x: x< 0. su intercepto sobre el eje y es 4.



También es importante notar que (2,1) significa si x=2, y=1, representa un solo punto.

En cambio $f(x) = y = 1, x > 0,$ la y, ya no representa un punto, sino una recta limitada o restringida por x> 0. y=1 es una recta paralela al eje x con intercepto sobre eje y, y= 1.

Las **funciones definidas a trozos** se llaman de esta manera porque tienen una definición diferente en cada tramo en el que están definidas. Una función **definida por partes o trozos** es aquella que no está definida por una ecuación sola, sino por dos o más.

Cada ecuación es válida para algún intervalo .

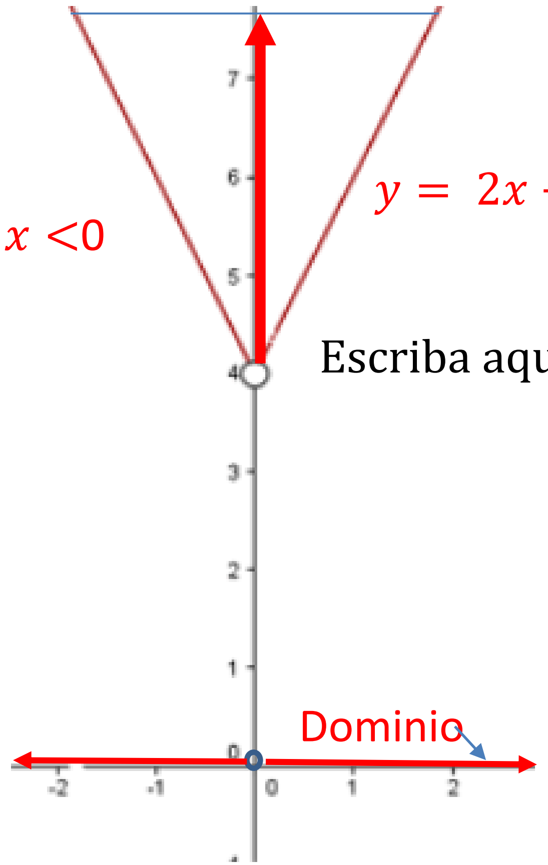
Representa las funciones a trozos

$\boxed{1}$ $$f(x)=\begin{cases}2x+4 & \text{si} \quad x>0\\ 4-2x & \text{si} \quad x<0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}2x+4 & \text{si} \quad x>0\\ 4-2x & \text{si} \quad x<0\end{cases}$$

$y = 4 - 2x, x < 0$

$y = 2x + 4,\ x > 0$



Escriba aquí la ecuación.

D: $\{$ x/ x ε R, y x ‡ 0

El dominio es el conjunto de los reales, menos x= 0.

El rango son los reales $y > 4$

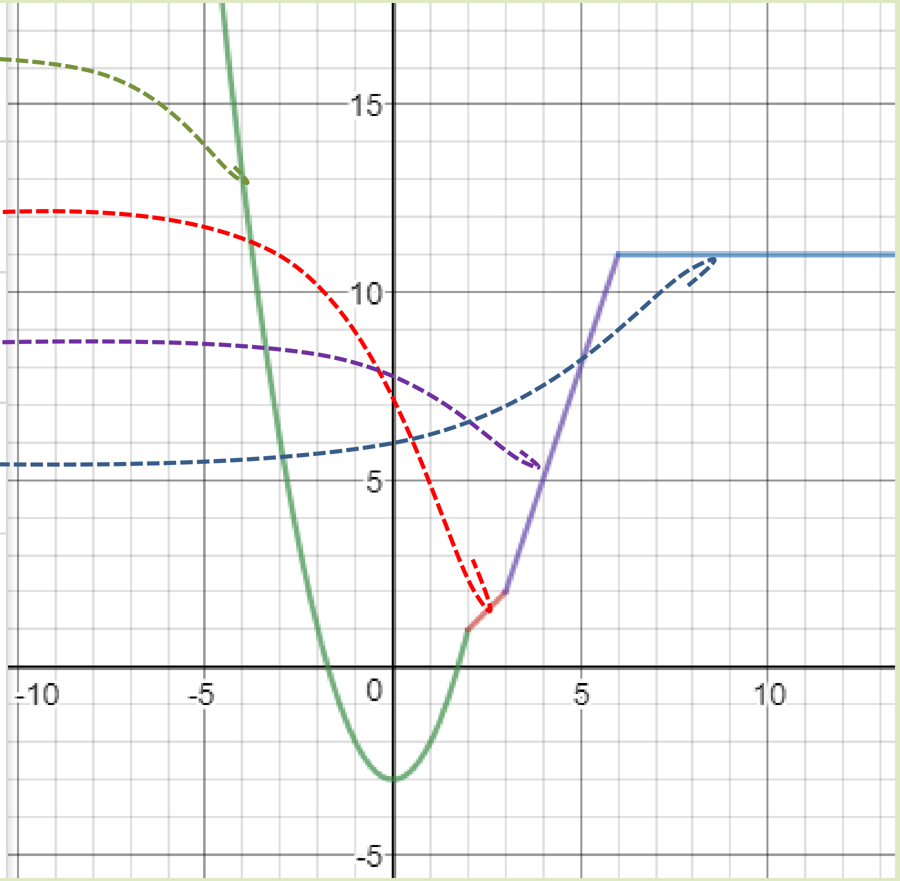
Determinar el dominio

$y = x^2 - 3 \ \{x \leq 2\}$

$y = x - 1 \ \{2 \leq x \leq 3\}$

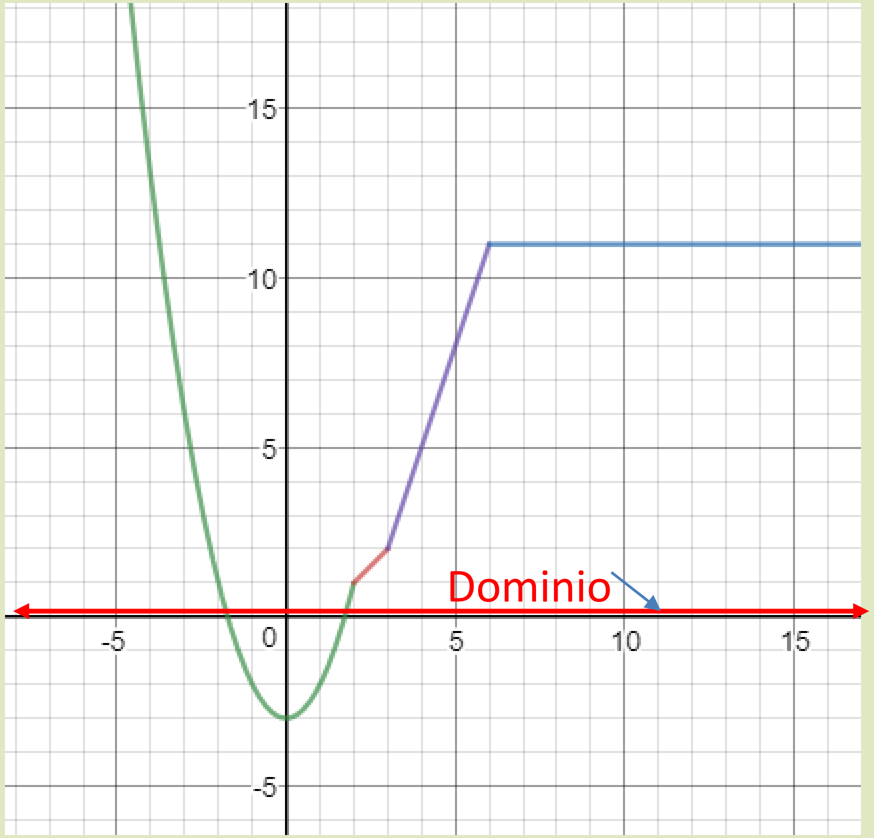
$y = 3x - 7 \ \{3 < x \leq 6\}$

$y = 11 \ \{6 < x\}$



https://www.desmos.com/calculator/uegnbdgdch

Determinar el dominio

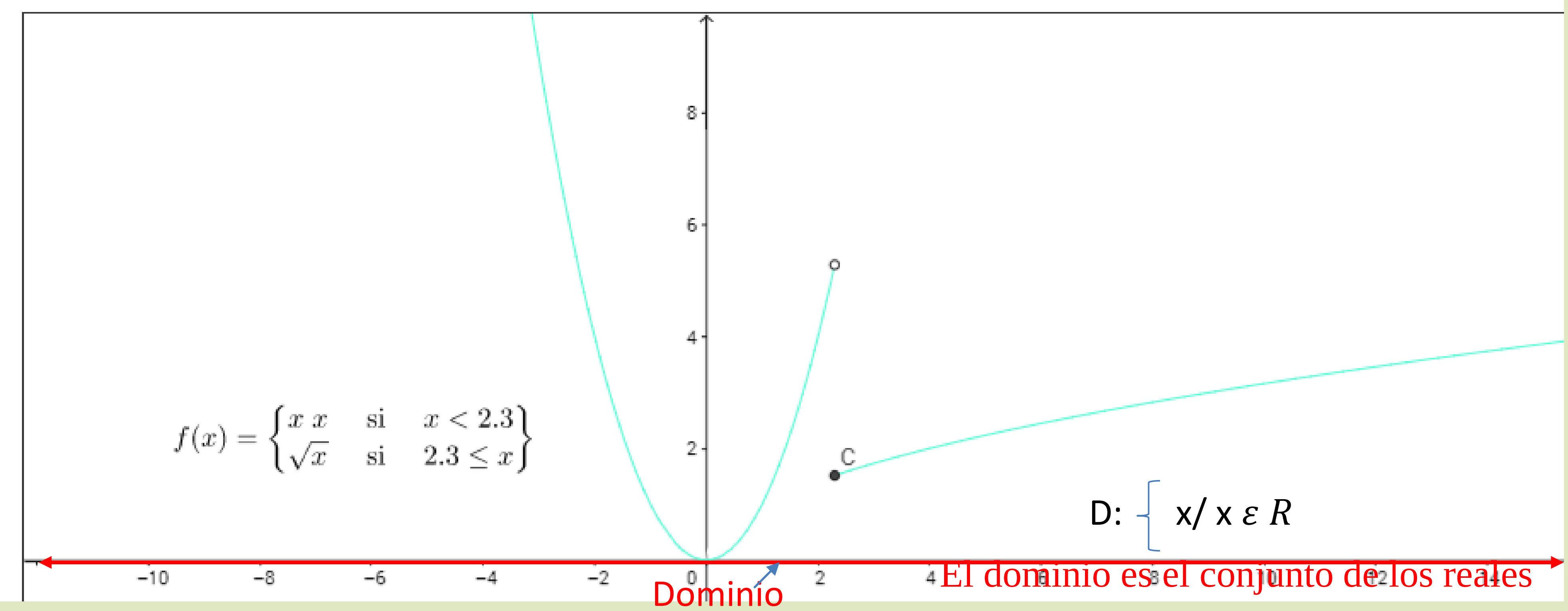


El dominio es el conjunto de los reales

D: $\{ x / x \varepsilon R$

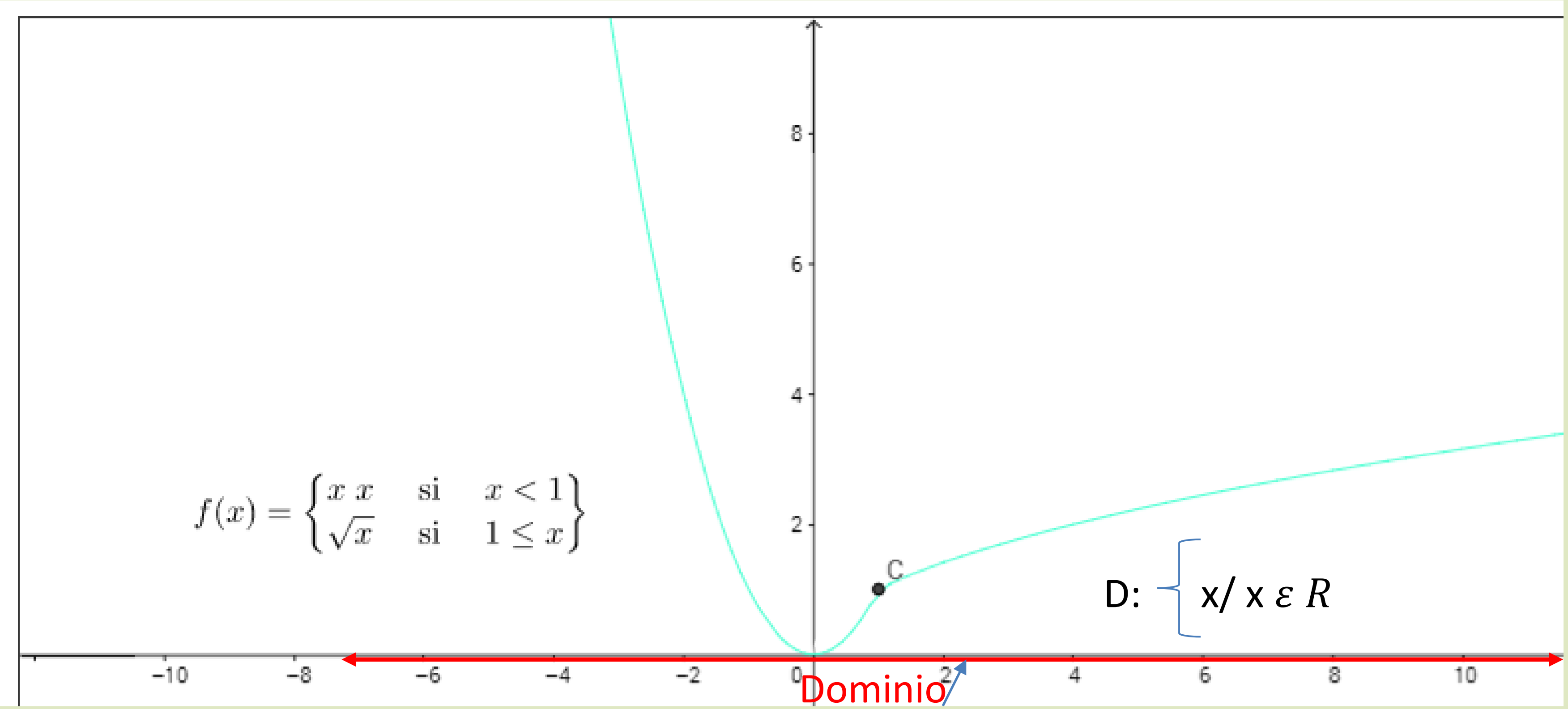
https://www.desmos.com/calculator/ueqnbdgdch

Determinar el dominio



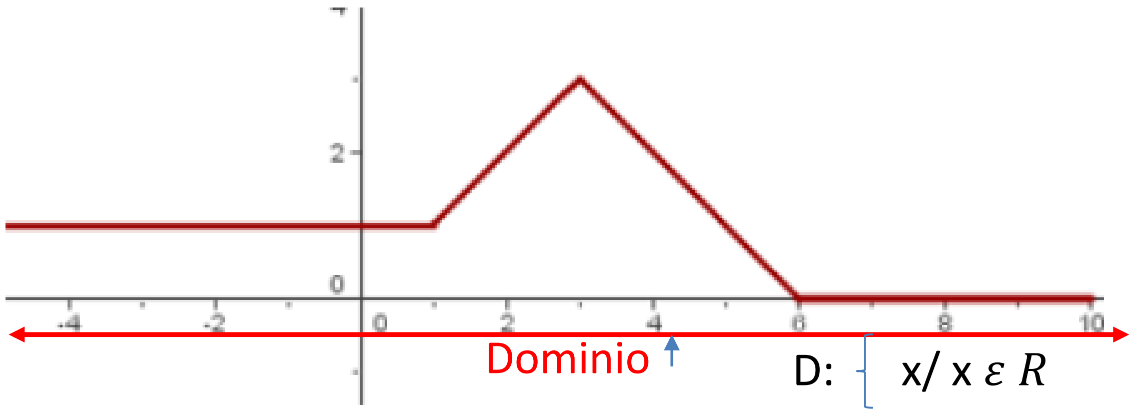
https://www.geogebra.org/m/XhYnJ5W2

Determinar el dominio



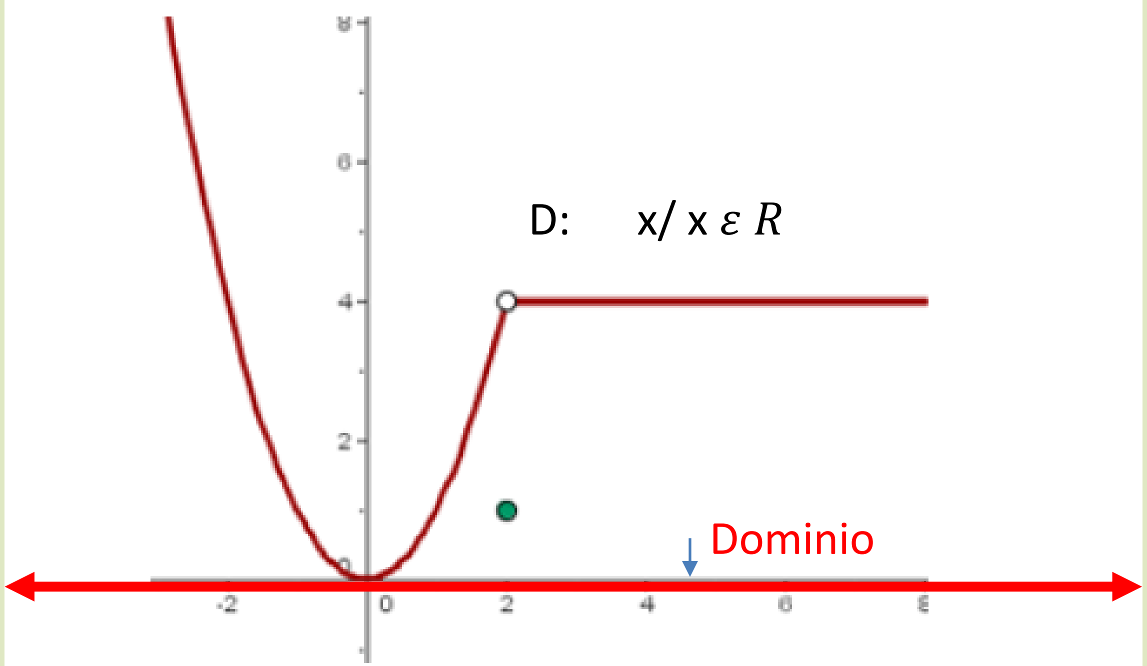
Representa las función definida a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x \leq 1 \\ x & si \quad 1 < x \leq 3 \\ -x+6 & si \quad 3 < x \leq 6 \\ 0 & si \quad 6 < x \end{cases}$$

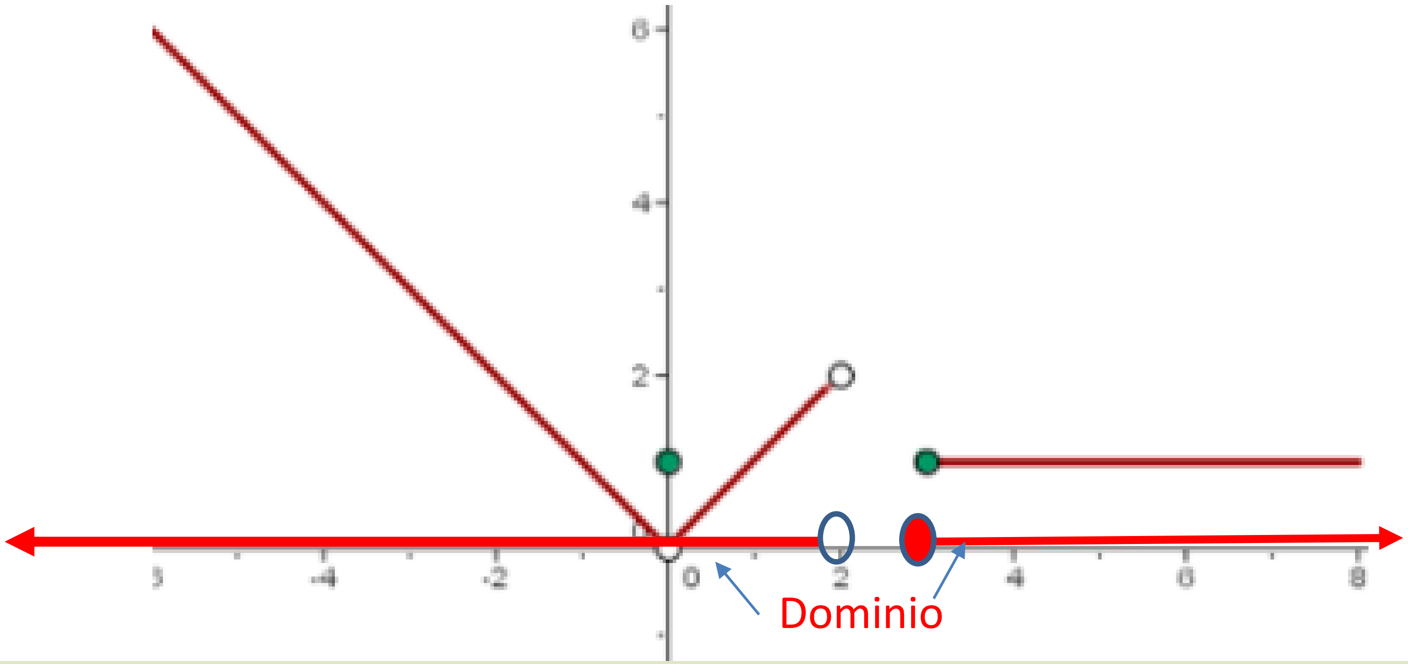


D: $\{ x / x \, \varepsilon \, R$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<2 \\ 1 & si \quad x=2 \\ 4 & si \quad x>2 \end{cases}$$

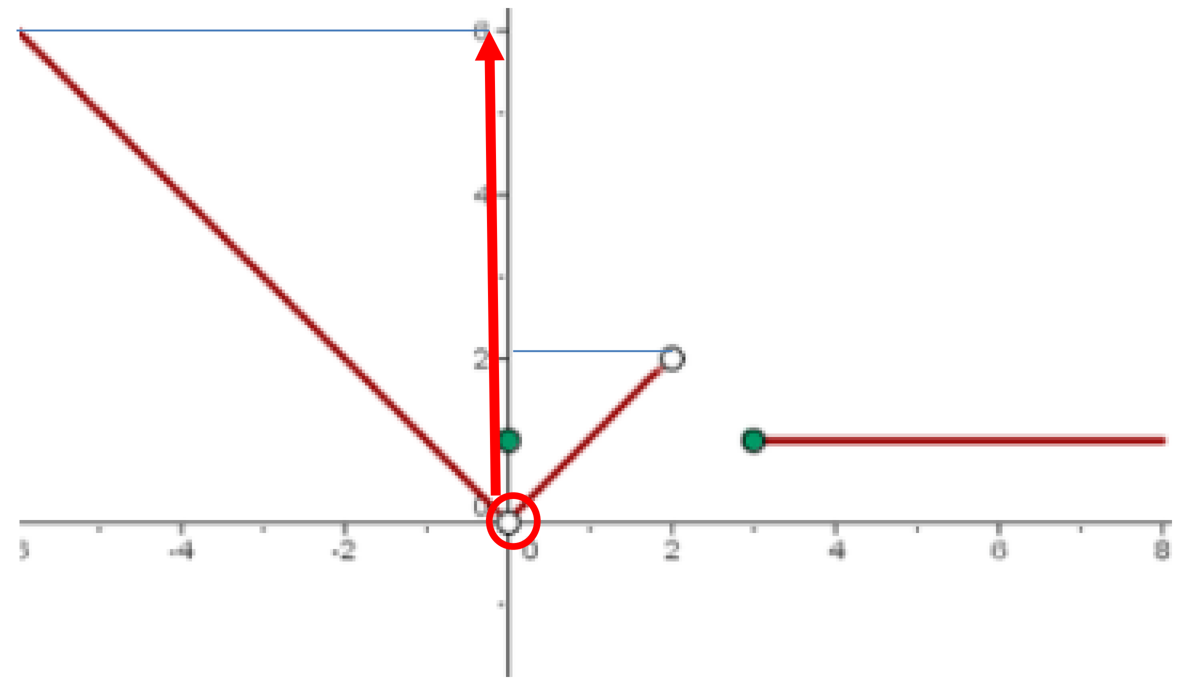


Encuentra la expresión analítica de la función



D: $\{$ x/ x ε R $exepto$ $(2,3)$

Dominio?



$$f(x)=\begin{cases} -x & si \quad x<0 \\ 1 & si \quad x=0 \\ x & si \quad 0<x<2 \\ 1 & si \quad x\geq 3 \end{cases}$$

https://www.vitutor.com/fun/2/t_e10.html

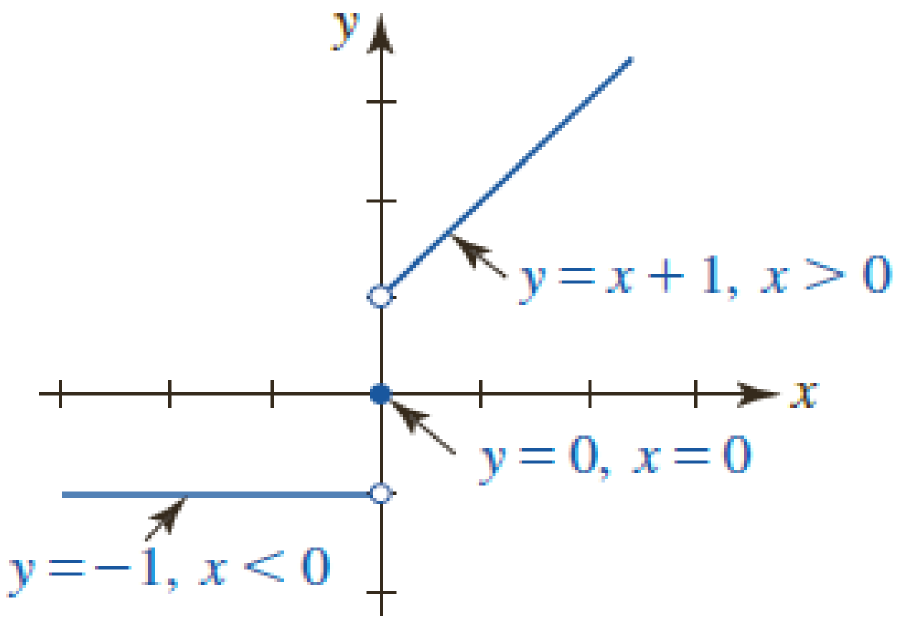


FIGURA 1.1.7 Gráfica de una función definida por partes en el ejemplo 8

Si $x > 0 \rightarrow f(x) = y = x+1$, es una línea recta con la restricción que $x > 0$, solo coge la parte derecha, sin incluir el punto (0,1)

Si x=0 $\rightarrow$ f(x)=y=0 $\rightarrow$
es solo un punto en el origen.

Si $x < 0 \rightarrow f(x) = y = -1$ es una línea recta paralela al eje x, como tiene la restricción que $x < 0$, solo coge la parte izquierda del eje x. No incluye el punto (0,-1)

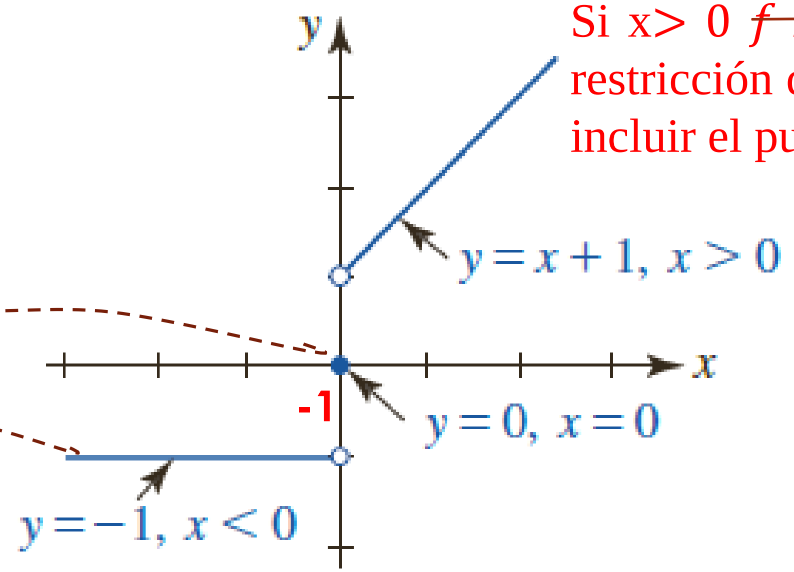


FIGURA 1.1.7 Gráfica de una función definida por partes en el ejemplo 8

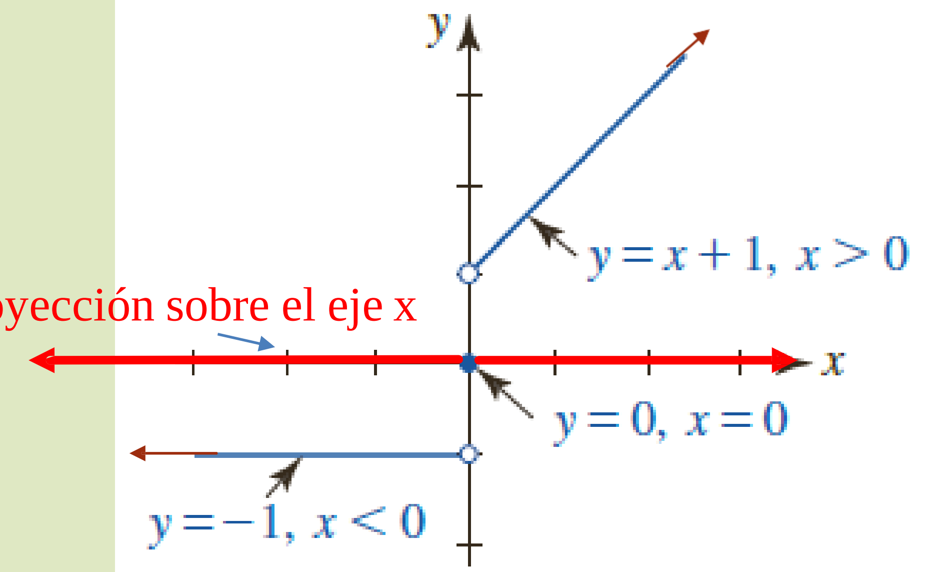


FIGURA 1.1.7 Gráfica de una función definida por partes en el ejemplo 8

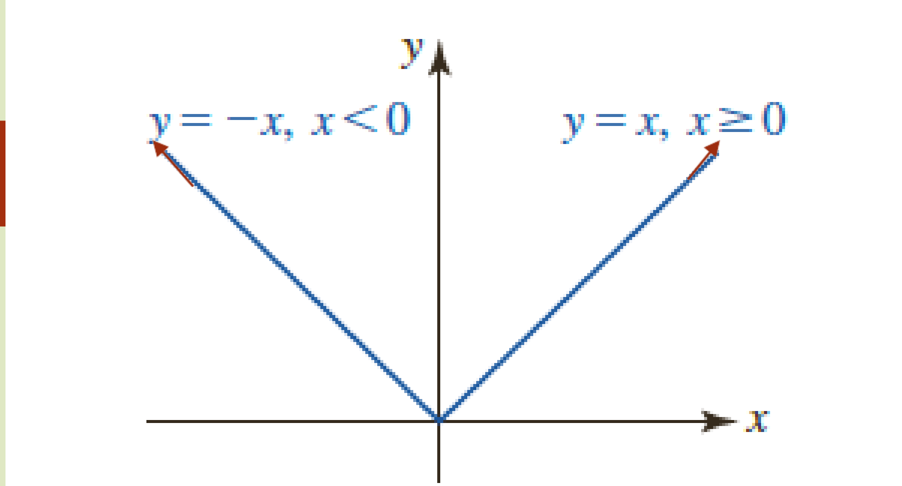
En la función anterior, aunque está definida por partes, y algunas partes no incluyen algunos conjuntos de números reales o puntos, el dominio son todos los reales, porque el conjunto total termina sin excluir ningún valor de la x. La manera más adecuada para obtener el dominio de estas funciones por partes, es proyectar sobre el eje x el gráfico y ver que incluye y que no.

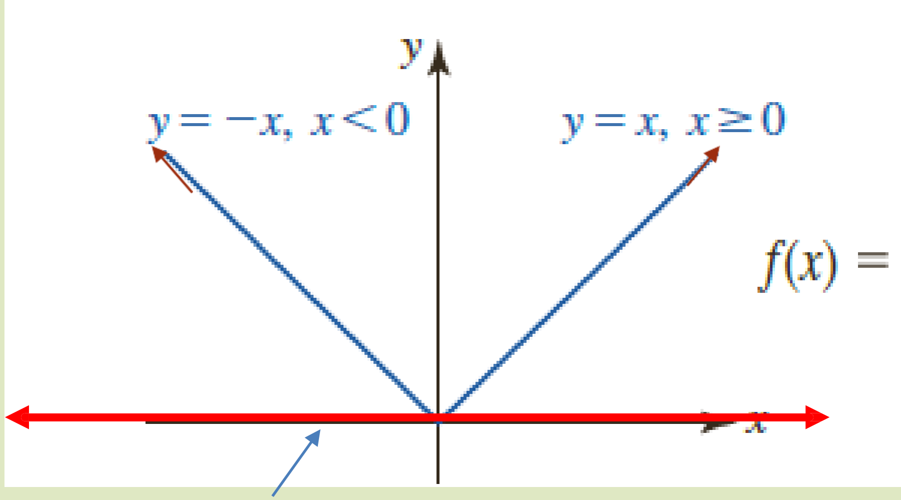
La flecha roja derecha es la proyección sobre el eje x + de la recta **y= x+1, x > 0**, no incluye el punto (0,0).

La flecha roja izquierda es la proyección sobre el eje x ─, de la recta **y= -1, x**< 0, no incluye el punto (0,0).

Pero, al estar el punto (0,0) en el origen, queda incluido en el dominio final.

El mismo procedimiento se hace para el rango en el eje y. Acá se excluiría el intervalo cerrado $-1 \leq y \leq 1$. Pero el rango incluye el punto P(0,0).





$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

La proyección sobre el eje x es todo el eje x.
La proyección sobre el eje y es solo la parte + del eje y.

Función valor absoluto La función $f(x) = |x|$, denominada **función valor absoluto**, aparece a menudo en el análisis de capítulos ulteriores. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales $(-\infty, \infty)$ y su rango es $[0, \infty)$. En otras palabras, para cualquier número real x, los valores de la función $f(x)$ son no negativos. Por ejemplo,

$$f(3) = |3| = 3, \quad f(0) = |0| = 0, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left|-\frac{1}{2}\right| = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

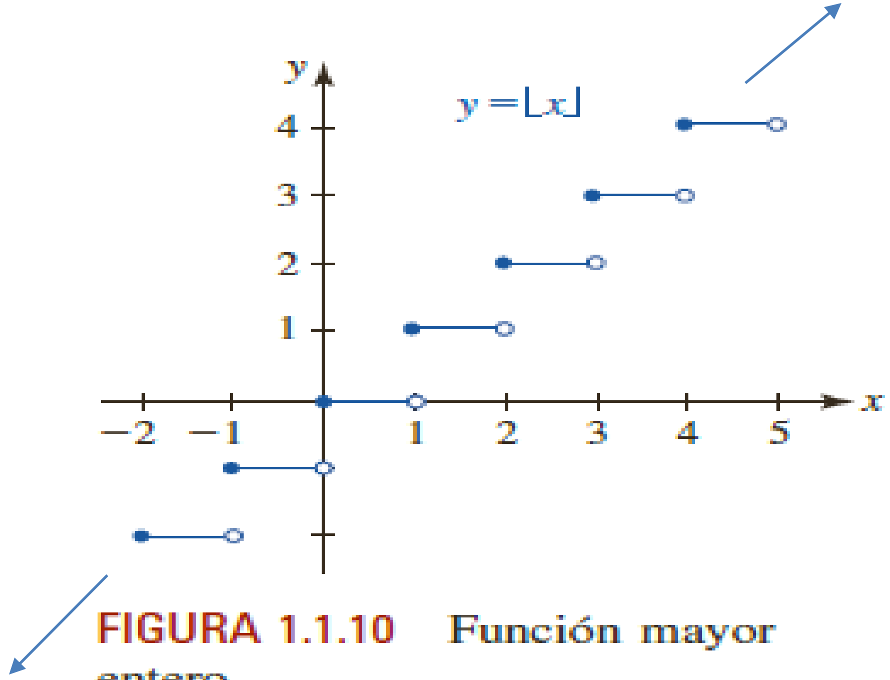


FIGURA 1.1.10 Función mayor entero

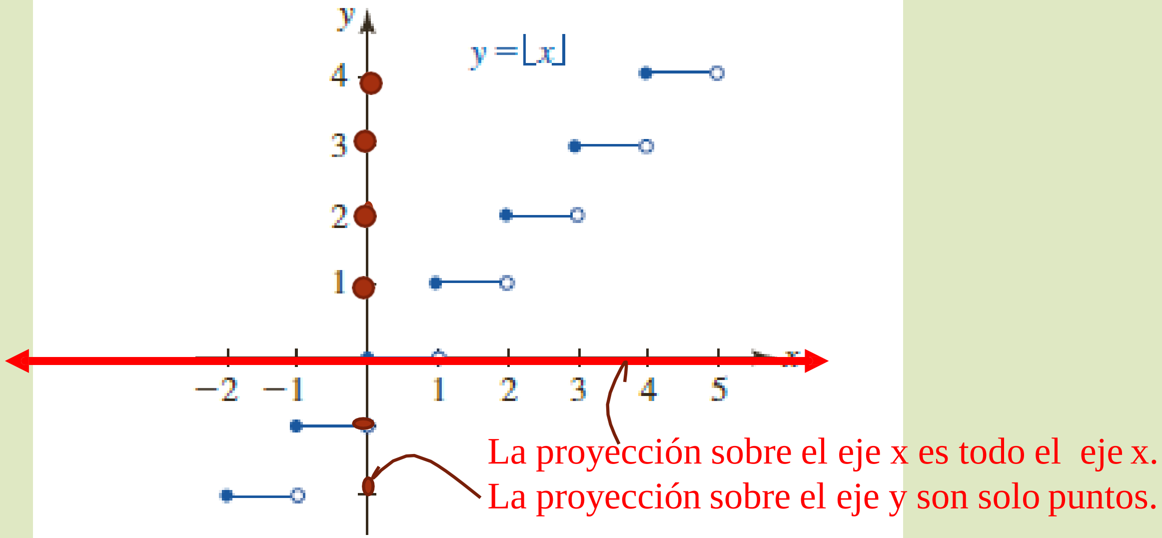


FIGURA 1.1.10 Función mayor entero

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \begin{cases} \quad \vdots & \text{....viene} \\ -2, & -2 \le x < -1 \\ -1, & -1 \le x < 0 \\ \ \ 0, & \ \ 0 \le x < 1 \\ \ \ 1, & \ \ 1 \le x < 2 \\ \ \ 2, & \ \ 2 \le x < 3 \\ \quad \vdots & \text{Sigue….} \end{cases}$$

La proyección sobre el eje y son solo puntos

El rango de f es el conjunto de enteros. La porción de la gráfica de f sobre el intervalo cerrado $[-2, 5]$ se proporciona en la FIGURA 1.1.10.

Tome nota que la función para x está definida por intervalos semiabiertos. Si la función se define para todo x, el dominio serán todos los reales. Observe, que la proyección sobre el eje x cobija a todos los reales.

Pero el rango está definido para rectas que saltan. Son solo los valores enteros sean +,- Rectas: …y=-3, y=-2, y=-1, y=0, y=1, y=2 y así sucesivamente….

El rango serán solo los números enteros, porque así se define la función.

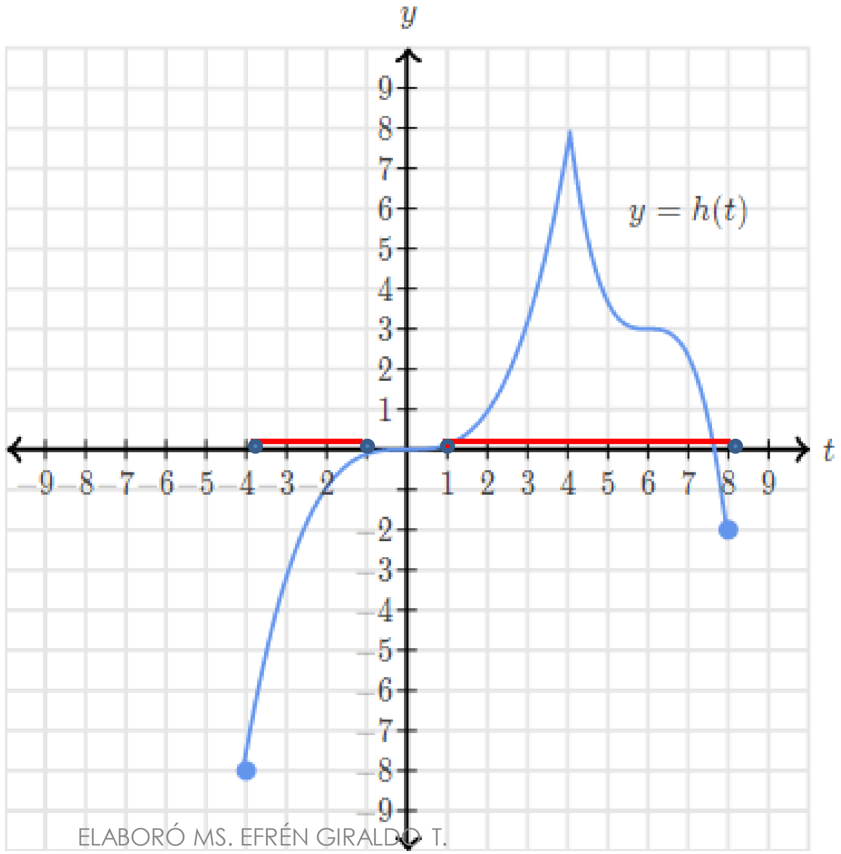
Función 1

¿Cuál es el dominio de h?

$\square \leq t \leq \square$

¿Cuál es el rango de h?

$\square \leq h(t) \leq \square$



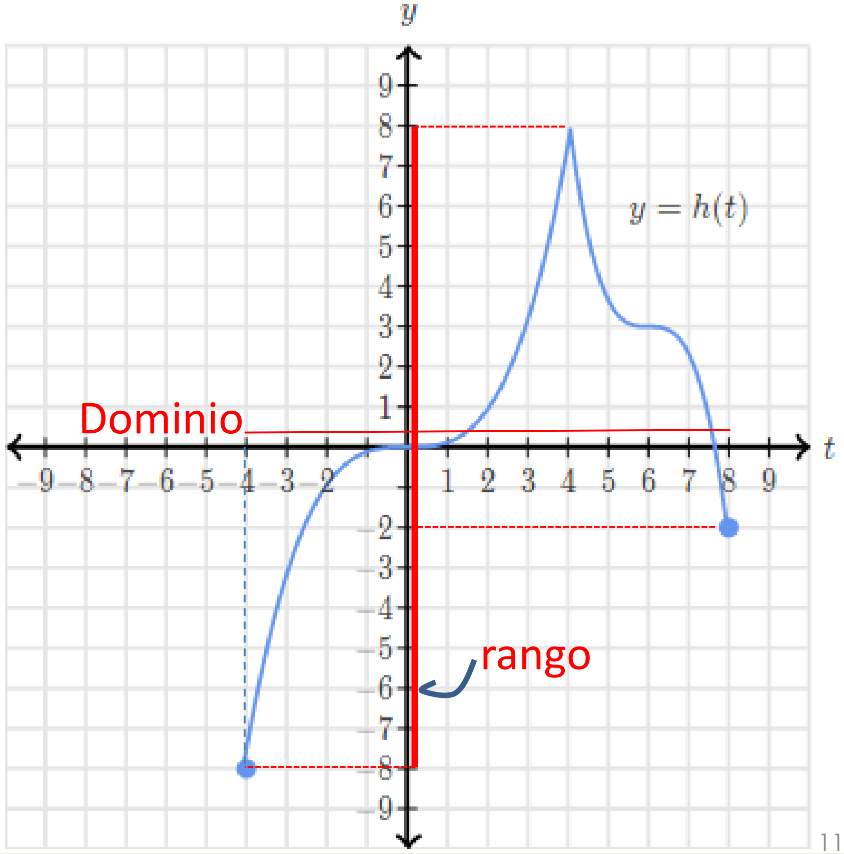
Función 2

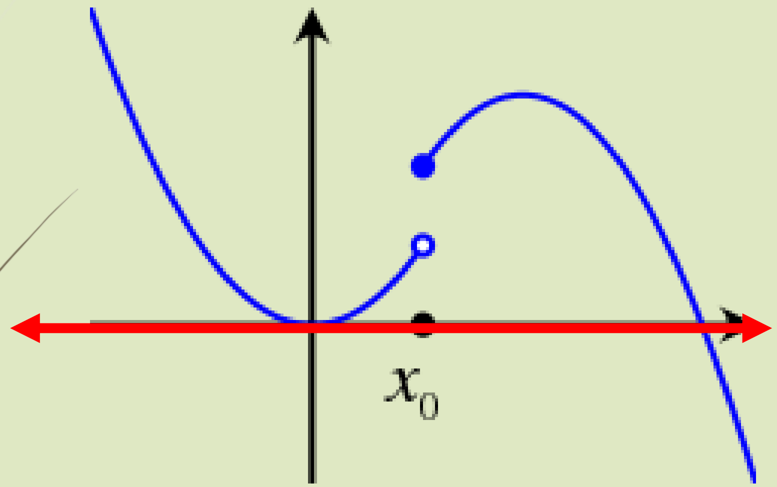
¿Cuál es el dominio de h?

$\square \leq t \leq \square$

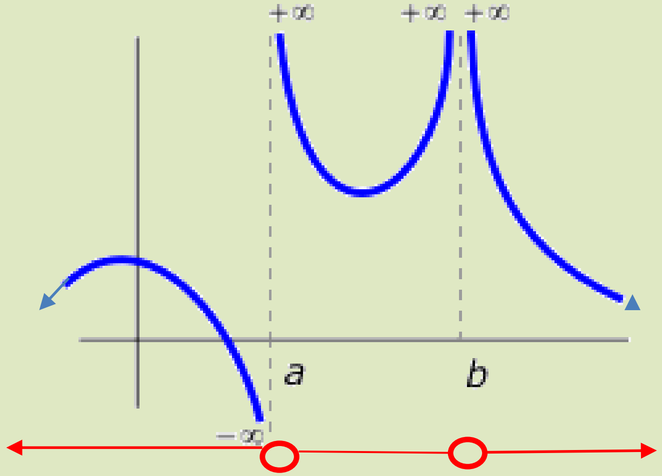
¿Cuál es el rango de h?

$\square \leq h(t) \leq \square$

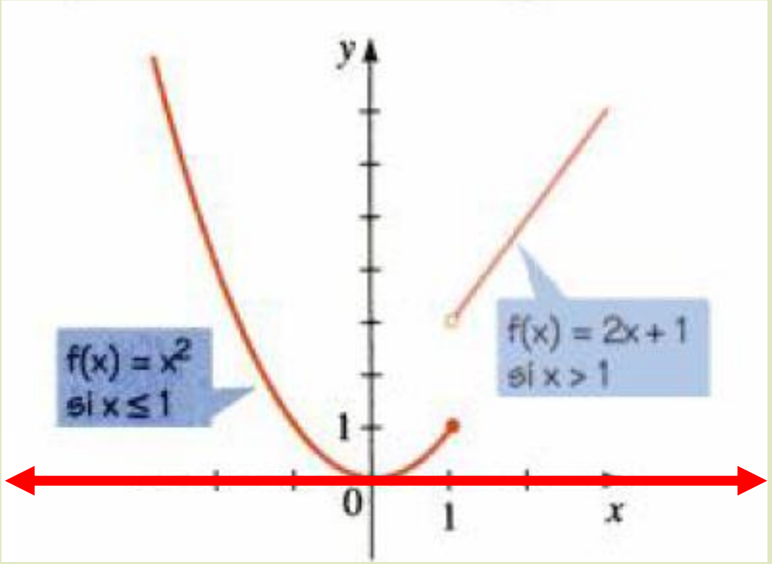




x_0



$+\infty$
$+\infty$
$+\infty$
a
b
$-\infty$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$