APLICACIONES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

6.1 Otro repaso al movimiento rectilíneo

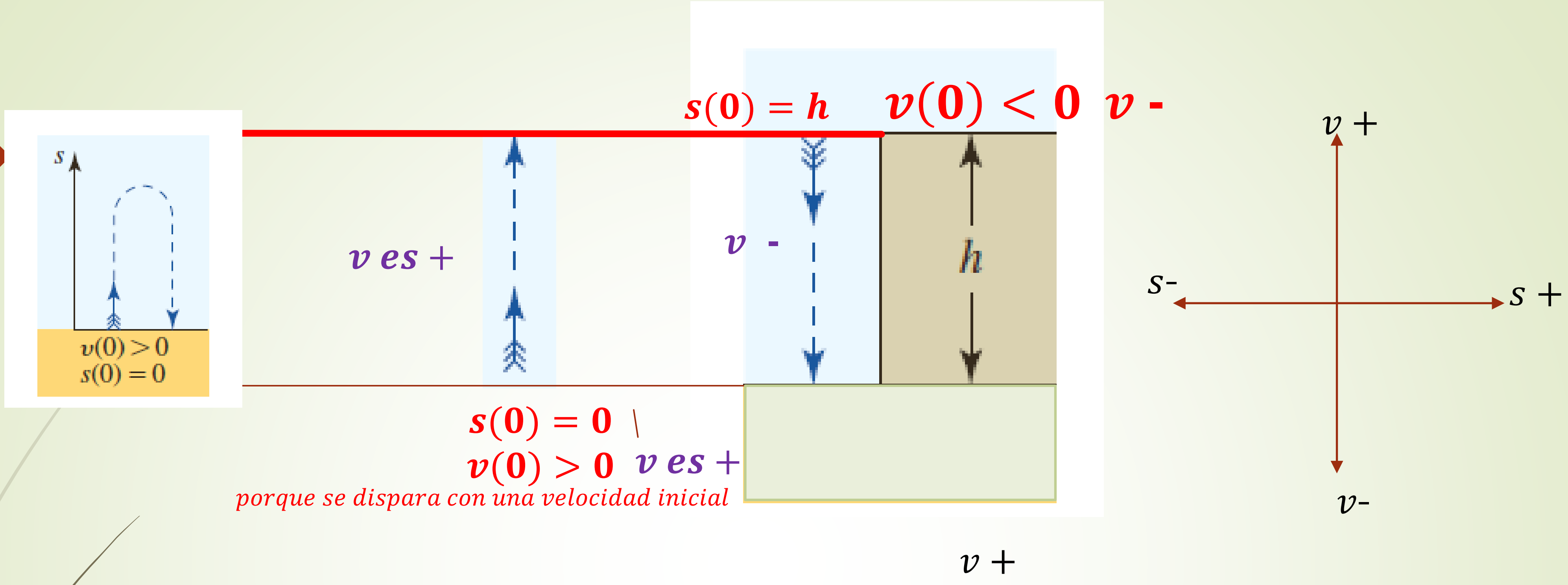
Introducción El capítulo 4, *Aplicaciones de la derivada*, empezó con el concepto de movimiento rectilíneo. Si $s = f(t)$ es la función de posición de un objeto que se mueve en línea recta, entonces sabemos que

$$\frac{ds}{dt} = v(t) = \text{velocidad} \qquad \text{y} \qquad \frac{dv}{dt} = a(t) = \text{aceleración}$$

Como una consecuencia inmediata de la definición de la antiderivada, las cantidades s y v pueden escribirse como integrales indefinidas

$$s(t) = \int v(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad v(t) = \int a(t)\,dt. \tag{1}$$

Si se conocen la **posición inicial** $s(0)$ y la **velocidad inicial** $v(0)$, es posible encontrar valores específicos de las constantes de integración usadas en (1).



Recuerde que cuando el cuerpo se mueve horizontalmente sobre una recta, la dirección positiva es hacia la derecha. Para movimiento en una recta vertical, tomamos la dirección positiva hacia arriba. Como se muestra en la FIGURA 6.1.1, si una flecha se dispara hacia arriba desde el nivel del suelo, entonces las **condiciones iniciales** son $s(0) = 0$, $v(0) > 0$, mientras que si la flecha se dispara hacia abajo desde una altura inicial, por ejemplo h metros del suelo, entonces las condiciones iniciales son $s(0) = h$, $v(0) < 0$.

EJEMPLO 1 Movimiento de un proyectil

Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 49 m/s. ¿Cuál es la velocidad en $t = 2$ s? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil? ¿Cuánto tiempo permanece en el aire el proyectil? ¿Cuál es la velocidad de impacto?

Condiciones iniciales

En $t = 0 \longrightarrow v_0 = 49\frac{m}{s}, \quad a = 9.8\frac{m}{s^2},$

$$v(t) = \int a(t)\, dt.$$

$h\ máxima = ?$

$v\ en\ t = 2,\ v(2) = ?,$

$t\ total\ en\ el\ aire?$

$velocidad\ de\ impacto?$

EJEMPLO 1 Movimiento de un proyectil

Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 49 m/s. ¿Cuál es la velocidad en $t = 2$ s? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil? ¿Cuánto tiempo permanece en el aire el proyectil? ¿Cuál es la velocidad de impacto?

Solución Si se empieza con $a(t) = -9.8$, por integración indefinida obtenemos

$$v(t) = \int (-9.8)\, dt = -9.8t + C_1. \qquad v(t) = -9.8t + C_1 \qquad (2)$$

A partir de la condición inicial dada $v(0) = 49$, vemos que (2) implica $C_1 = 49$. Por tanto,

$$v(t) = -9.8t + 49,$$

y así $v(2) = -9.8(2) + 49 = 29.4$ m/s. Observe que $v(2) > 0$ implica que el proyectil se desplaza hacia arriba.

Luego, la altitud del proyectil, medida a partir del nivel del suelo, es la integral indefinida de la función velocidad,

$$\frac{ds}{dt} = v(t) = -9.8t + 49 \quad ds = v(t)dt$$

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int (-9.8t + 49)\,dt = -4.9t^2 + 49t + C_2. \tag{3}$$

En $t = 0 \longrightarrow s(0) = 0$

Puesto que el proyectil inicia su movimiento a partir del nivel del suelo, $s(0) = 0$ y (3) proporcionan $C_2 = 0$. Por tanto,

$$s(t) = -4.9t^2 + 49t. \tag{4}$$

$v(t) = -9.8t + 49,$

Cuando el proyectil alcanza su altura máxima, $v(t) = 0$. Luego, al resolver $-9.8t + 49 = 0$ obtenemos $t = 5$. Por (4) encontramos que la altura correspondiente es $s(5) = 122.5$ m.

$s(t) = 0$

Finalmente, para encontrar el instante en que el proyectil choca contra el suelo, resolvemos $s(t) = 0$ o $-4.9t^2 + 49t = 0$. Cuando la última ecuación se escribe como $-4.9t(t - 10) = 0$, vemos que el proyectil permanece en el aire 10 s. La velocidad de impacto es $v(10) = -49$ m/s. ■

$v_0 = -8\frac{pies}{s}$, $h = 54\, pies$, $\boldsymbol{a} = -\mathbf{32}\frac{\boldsymbol{pies}}{\boldsymbol{s^2}}$, $t = 0$

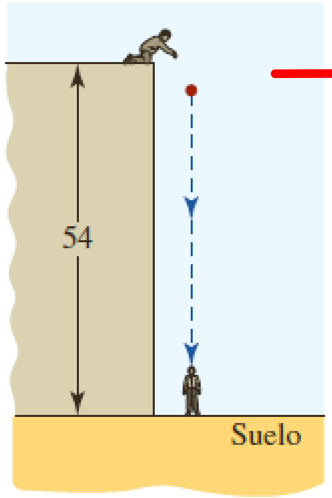


FIGURA 6.1.2 Lanzamiento de la pelota en el ejemplo 2

$$v(t) = \int a(t)\, dt.$$

EJEMPLO 2 Movimiento de un proyectil

Una pelota de tenis se lanza verticalmente hacia abajo desde una altura de 54 pies con una velocidad inicial de 8 pies/s. ¿Cuál es la velocidad de impacto si la pelota golpea en la cabeza a una persona de 6 pies de estatura? Vea la FIGURA 6.1.2.

$v_0 = 8\,\frac{pies}{s},\ h = \ 54\,pies,\ a = -32\,\frac{pies}{s^2},\ \ t = 0$

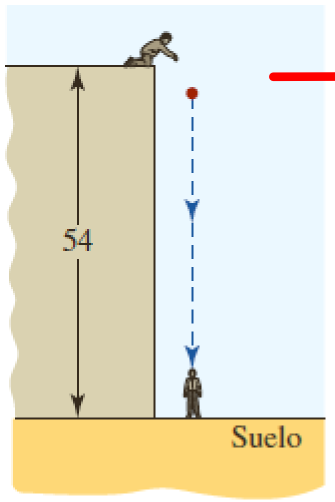


FIGURA 6.1.2 Lanzamiento de la pelota en el ejemplo 2

EJEMPLO 2 Movimiento de un proyectil

Una pelota de tenis se lanza verticalmente hacia abajo desde una altura de 54 pies con una velocidad inicial de 8 pies/s. ¿Cuál es la velocidad de impacto si la pelota golpea en la cabeza a una persona de 6 pies de estatura? Vea la FIGURA 6.1.2.

Solución En este caso $a(t) = -32$, $s(0) = 54$ y, puesto que la pelota se lanza hacia abajo, $v(0) = -8$. Luego,

$v(t) = -32t + C_1 \qquad en\ t = 0 \longrightarrow v_0 = 8\,\frac{pies}{s}$

$$v(t) = \int (-32)\,dt = -32t + C_1.$$

Al usar la velocidad inicial $v(0) = -8$ encontramos $C_1 = -8$. En consecuencia,

$en\ t = 0$

$$v(t) = -32t - 8. \qquad v(t) = -32t - 8$$

Al continuar encontramos

$$s(t) = \int (-32t - 8)\, dt = -16t^2 - 8t + C_2.$$

Cuando $t = 0$, sabemos que $s = 54$ y así la última ecuación implica $C_2 = 54$. Entonces

$$s(t) = -16t^2 - 8t + 54.$$

Para determinar el instante que corresponde a $s = 6$, resolvemos

$$-16t^2 - 8t + 54 = 6.$$

Al simplificar obtenemos $-8(2t - 3)(t + 2) = 0$ y $t = \frac{3}{2}$. Entonces, la velocidad de la pelota cuando golpea a la persona es $v\left(\frac{3}{2}\right) = -56$ pies/s. ■

Distancia La **distancia total** que un objeto recorre rectilíneamente en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ está dada por la integral definida

$$\text{distancia total} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt. \tag{5}$$

En (5) se requiere el valor absoluto porque el objeto puede moverse a la izquierda, de modo que durante algún tiempo tiene velocidad negativa.

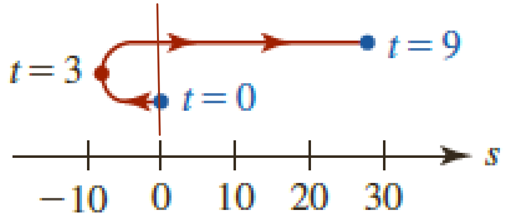


FIGURA 6.1.3 Representación del movimiento del objeto en el ejemplo 3

EJEMPLO 3 Distancia recorrida

La función de posición de un objeto que se mueve sobre una recta de coordenadas es $s(t) = t^2 - 6t$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la distancia recorrida en el intervalo de tiempo [0, 9].

Solución La función velocidad $v(t) = ds/dt = 2t - 6 = 2(t - 3)$ muestra que el movimiento es como se indica en la FIGURA 6.1.3; a saber: $v < 0$ para $0 \leq t < 3$ (movimiento a la izquierda) y $v \geq 0$ para $3 \leq t \leq 9$ (movimiento a la derecha). Entonces, por (5) la distancia recorrida es

$$\begin{aligned}\int_0^9 |2t - 6|\, dt &= \int_0^3 |2t - 6|\, dt + \int_3^9 |2t - 6|\, dt \\ &= \int_0^3 -(2t - 6)\, dt + \int_3^9 (2t - 6)\, dt \\ &= (-t^2 + 6t)\Big]_0^3 + (t^2 - 6t)\Big]_3^9 = 45 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Por supuesto, el último resultado debe ser consistente con la cifra obtenida al simplemente contar las unidades en la figura 6.1.3 entre $s(0)$ y $s(3)$, y entre $s(3)$ y $s(9)$. ■

Sobre un cuerpo que se mueve en una recta vertical cerca de la superficie terrestre, como la flecha disparada hacia arriba, actúa la fuerza de gravedad.

Esta fuerza provoca la aceleración o desaceleración de los cuerpos. Cerca de la superficie de la Tierra se supone que la aceleración debida a la gravedad, $a(t) = -g$, es una constante. La magnitud g de esta aceleración:

$$32 \text{ pies/s}^2, \quad 9.8 \text{ m/s}^2 \quad \text{o bien,} \quad 980 \text{ cm/s}^2.$$

Movimiento rectilíneo.

Se lanza una piedra hacia arriba a una velocidad de 30 pies por segundo.

a. Determine la velocidad de la piedra en función del tiempo. ¿Con que rapidez y en que dirección se mueve pasados 5 segundos?

b. Determine la posición de la piedra en función del tiempo. ¿Dónde estará pasando en 5 segundos?

Solución.

a. Definiremos que las alturas sobre el piso son positivas, por lo que un objeto que sube tiene velocidad positiva, y la aceleración es hacia abajo debido a la gravedad, es decir, es negativa. Así, la aceleración de la piedra se expresa por

$$a(t) = -32 pies/s^2$$

Se desea conocer la velocidad, que es la Antiderivada de la aceleración, así que

$$v(t) = \int (-32) dt = -32t + c$$

Esta es la velocidad en función del tiempo t. Pero ¿Cuál es el valor de C? Ahora bien, se nos indicó que la piedra se arrojaba hacia arriba a 30 pies/s, así que cuando t=0, v =30; esto es, v (0)=30. Por tanto, 30=v (0)=-32(0)+C

Así que C = 30, y la fórmula de la velocidad es $v(t) = -32t + 30$ .En particular después de 5 segundos la velocidad es

$$v(5) = -32(5) + 30 = -130 pies/s$$

Por consiguiendo, después de 5 segundos la piedra está cayendo a una velocidad de 130 pies por segundo.

b. Se quiere conocer la posición, pero la posición es la Antiderivada de la velocidad. Entonces

$$s(t) = \int v(t)dt = \int (32t + 30)dt = -16t^2 + 30t + c$$

Ahora bien, para calcular C se necesita conocer la posición inicial s(0). El problema no lo dice, pero podemos medir las alturas de modo que la posición inicial sea cero. Entonces, 0 = s(0) = C

Y $s(t) = -16t^2 + 30t$. En Particular, a los 5 segundos tiene una altura de

$$s(5) = -16(5)^2 + 30(5) = -250 pies$$

En otras palabras, la piedra está ahora a 250 pies abajo del lugar donde fue lanzada

http://www.clasesrobertotorres.com/calculo_integral/cap_1_integral_indefinida/aplicaciones_de_la_integral_indefinida.html

- https://es.symbolab.com/solver/indefinite-integral-calculator/%5Cint%20Xdx
- https://www.zweigmedia.com/MundoReal/tutorials4/framesAntiDerivB.html

El **coste marginal** se define como la variación en el **coste** total, ante el aumento de una unidad en la cantidad producida. Dicho en otras palabras, es el **coste** de producir una unidad adicional.

Se entiende como la variación del costo total respecto a variaciones unitarias de la cantidad producida**.**

Determinación del costo total a partir del costo marginal.

La determinación de costo total a partir del costo marginal es una de las tantas aplicaciones que tiene el cálculo integral. Para determinar el costo total tenemos que considerar lo siguiente:

$c´(x) = \frac{d\,c(x)}{dq}$

c(x)=$\int c´(x)dx$

Donde c´(x) es el costo marginal, c(x) es la función de costo y la constante de integración es el costo fijo

http://www.clasesrobertotorres.com/calculo_integral/cap_1_integral_indefinida/aplicaciones_de_la_integral_indefinida.html