Movimiento rectilíneo

Se denomina movimiento rectilíneo, aquél cuya trayectoria es una línea recta.

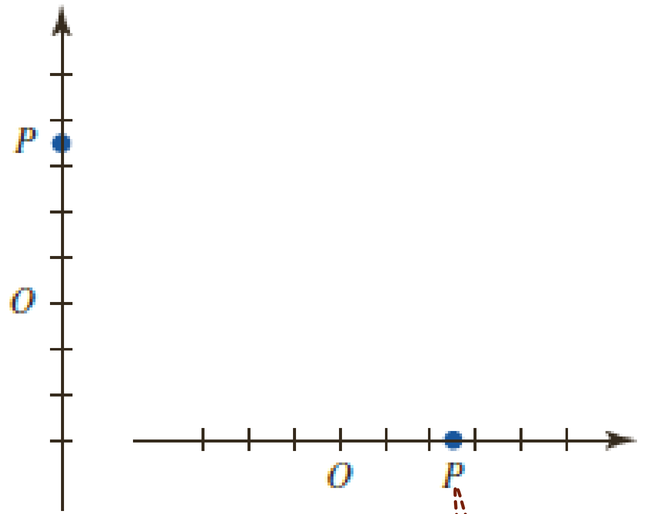


FIGURA 2.7.11 Rectas coordenadas

Movimiento rectilíneo Para generalizar el análisis, suponga que un objeto, o partícula, en el punto P se mueve a lo largo de una recta de coordenadas vertical u horizontal como se muestra en la FIGURA 2.7.11. Además, considere que la partícula se mueve de modo que su posición, o coordenada, sobre la recta está dada por una función $s = s(t)$, donde t representa el tiempo. s está en función del tiempo o depende del tiempo.

En la recta situamos un origen O, donde estará un observador que medirá la posición del móvil x en el instante t. Las posiciones serán positivas si el móvil está a la derecha del origen y negativas si está a la izquierda del origen.

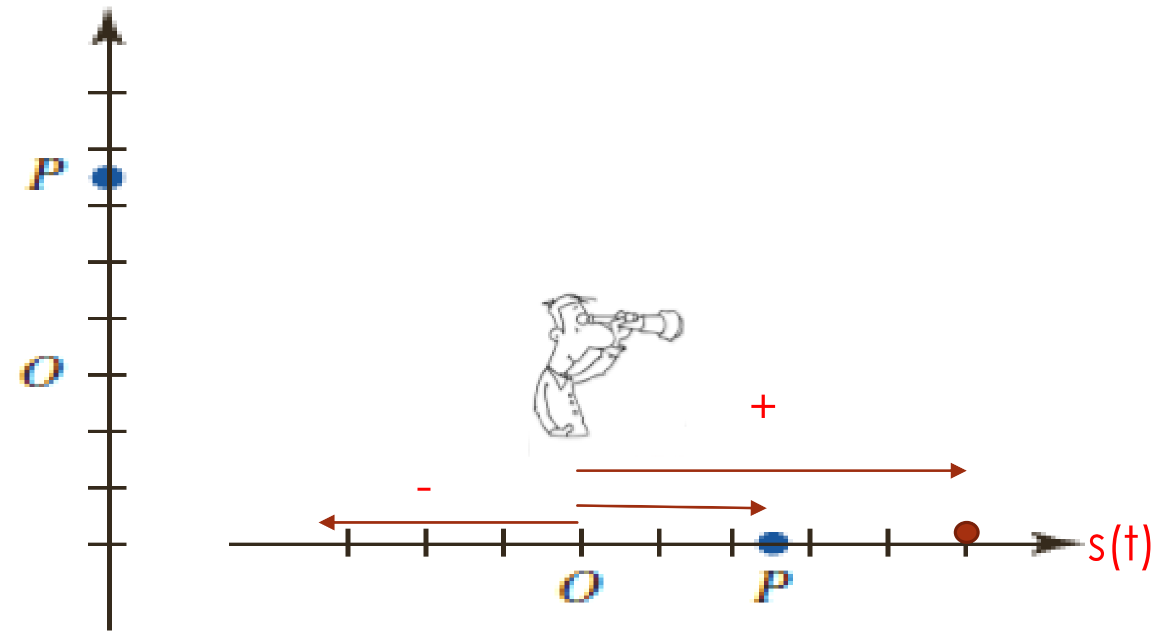


FIGURA 2.7.11 Rectas coordenadas

Los valores de s son distancias dirigidas medidas a partir de O en unidades como centímetros, metros, pies o millas. Cuando P está a la derecha o arriba de O, se considera $s > 0$, mientras $s < 0$ cuando P está a la izquierda o abajo de O. El movimiento en línea recta se denomina **movimiento rectilíneo**.

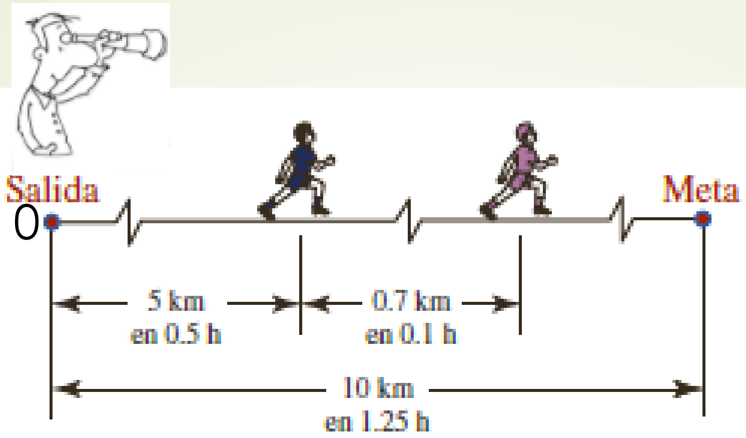


FIGURA 2.7.10 Corredor en una carrera de 10 km

Velocidad media En general, la **velocidad media** o **rapidez media** de un objeto en movimiento está definida por

$$v_{pro} = \frac{\text{cambio en distancia}}{\text{cambio en tiempo}}. = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Considere un corredor que termina una carrera de 10 km en un tiempo de 1 h 15 min (1.25 h). La velocidad media del corredor, o rapidez media de la carrera, fue

$$v_{pro} = \frac{10 - 0}{1.25 - 0} = 8 \text{ km/h}.$$

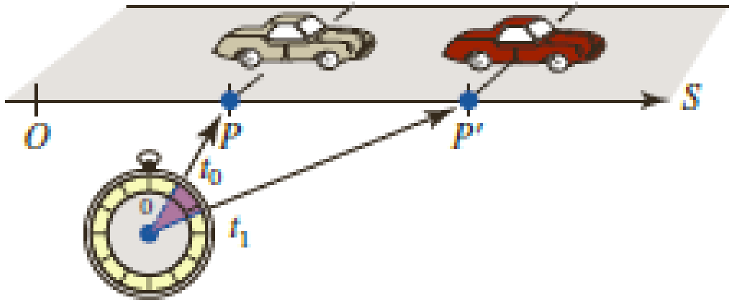


FIGURA 2.7.12 Posición de un automóvil de juguete sobre una recta coordenada en dos instantes

Si un objeto, como un automóvil de juguete, se mueve sobre una recta de coordenadas horizontal, se trata de un punto P en el instante t_0 y un punto P' en el instante t_1, y entonces las coordenadas de los puntos, que se muestran en la FIGURA 2.7.12, son $s(t_0)$ y $s(t_1)$. Por (4), la **velocidad media** del objeto en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ es

$$v_{\text{pro}} = \frac{\text{cambio en posición}}{\text{cambio en tiempo}} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}. \tag{6}$$

Definición 2.7.2 Velocidad instantánea

Sea $s = s(t)$ una función que proporciona la posición de un objeto que se mueve en línea recta. Entonces la **velocidad instantánea** en el instante $t = t_0$ es

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \tag{8}$$

siempre que el límite exista.

Definición 4.1.1 Función velocidad

Si $s(t)$ es una función posición de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces su **función velocidad** $v(t)$ en el instante t es

$$v(t) = \frac{ds}{dt}.$$

La **rapidez** del objeto en el instante t es $|v(t)|$.

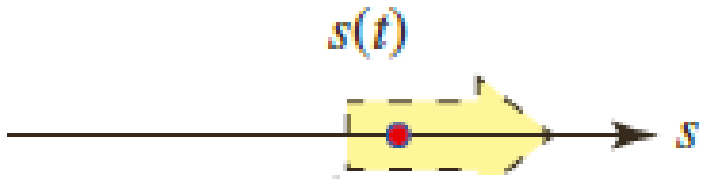
Definición 4.1.2 Función aceleración

Si $v(t)$ es la función velocidad de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces su **función aceleración** $a(t)$ en el instante t es

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

b) $v(t) < 0$ movimiento hacia la izquierda

FIGURA 4.1.2 Significado del signo de la función velocidad



a) $v(t) > 0$ movimiento hacia la derecha

■ Significado de los signos algebraicos

Un objeto en movimiento rectilíneo

- **desacelera** cuando su velocidad y aceleración tienen signos algebraicos opuestos, y
- **acelera** cuando su velocidad y aceleración tienen el mismo signo algebraico.

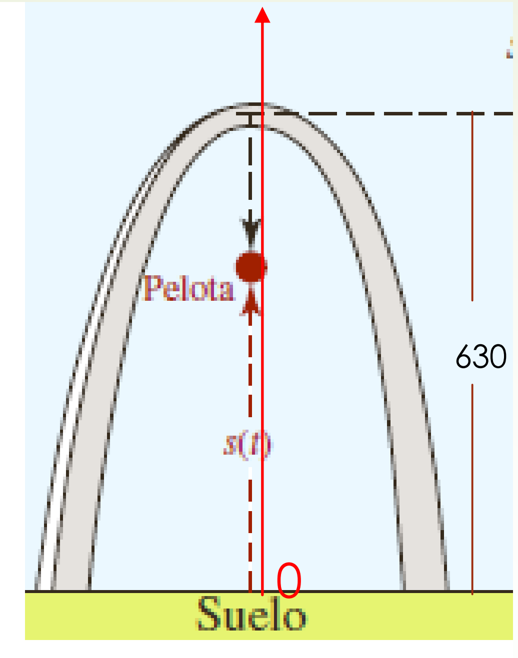
Aunque el objeto se mueva en línea recta, la relación entre la trayectoria y el tiempo no necesariamente es lineal. Por ejemplo, si un objeto se suelta desde una altura dada en caída libre (solo bajo la fuerza de la gravedad) , la relación entre s(t) y t, si se toma la trayectoria en pies y el tiempo en segundos viene dada por:

$$s(t) = -16t^2 + 630$$

Que corresponde a una más general, con una velocidad inicial v_0 en un tiempo t_0 y un espacio inicial s_0:

:

s(t)=$s_0 + v_0 t_0 - 16t^2$



EJEMPLO 8 Velocidad media

La altura s por arriba del suelo a que se suelta una pelota desde la parte superior del Arco de San Luis Missouri está dada por $s(t) = -16t^2 + 630$, donde s se mide en pies y t en segundos. Vea la FIGURA 2.7.13. Encuentre la velocidad media de la pelota que cae entre el instante en que se suelta la pelota y el instante en que golpea el suelo.

Si tomo mi sistema de referencia el suelo, o sea suelo = 0, y si supongo que la pelota arranca de 630 pies, el espacio inicial es 630 pies, el cómo subió allá no importa. Y desde allí se va a soltar la pelota. Y tomo ese momento como tiempo 0. O sea, que a una altura de 630 pies se va a soltar la pelota y el tiempo es por tanto 0. Mi sistema de trayectoria está referenciado al suelo, pero no el tiempo.

$$t_0=0 \longrightarrow s_0=630$$

Cuando la pelota toca el suelo en un tiempo t, el espacio se ha reducido a 0, es s=0.

$$t_t \longrightarrow s_{final}=0$$

Solución El instante en que se suelta la pelota está determinado por la ecuación $s(t) = 630$ o $s(t) = 0$ o $-16t^2 + 630 = 0$. Con la última ecuación se obtiene $t = \sqrt{315/8} \approx 6.27$ s. Así, por (6) la velocidad media en el intervalo de tiempo $\left[0, \sqrt{315/8}\right]$ es

$$v_{\text{pro}} = \frac{s\left(\sqrt{351/8}\right) - s(0)}{\sqrt{351/8} - 0} = \frac{0 - 630}{\sqrt{351/8} - 0} \approx -100.40 \text{ pies/s.} \quad \blacksquare$$

La velocidad instantánea es la derivada del espacio con respecto al tiempo:

s(t)=$s_0 + -16t^2$

$\frac{d\ s(t)}{dt}$= v= -32t

EJEMPLO 1 Posición de una partícula en movimiento

Una partícula se mueve sobre una recta horizontal según la función posición $s(t) = -t^2 + 4t + 3$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. ¿Cuál es la posición de la partícula a 0, 2 y 6 segundos?

Solución Al sustituir en la función posición obtenemos

$$s(0) = 3, \quad s(2) = 7, \quad s(6) = -9.$$

Como se muestra en la FIGURA 4.1.1, $s(6) = -9 < 0$ significa que la posición de la partícula está a la izquierda del punto de referencia $s = 0$.

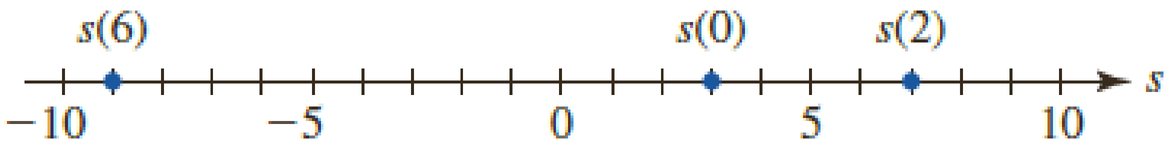


FIGURA 4.1.1 Posición de una partícula en varios instantes en el ejemplo 1

EJEMPLO 2 Otro repaso al ejemplo 1

En el ejemplo 1 las funciones velocidad y aceleración de la partícula son, respectivamente,

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -2t + 4 \qquad \text{y} \qquad a(t) = \frac{dv}{dt} = -2.$$

En los instantes 0, 2 y 6 s, las velocidades son $v(0) = 4$ cm/s, $v(2) = 0$ cm/s y $v(6) = -8$ cm/s, respectivamente.

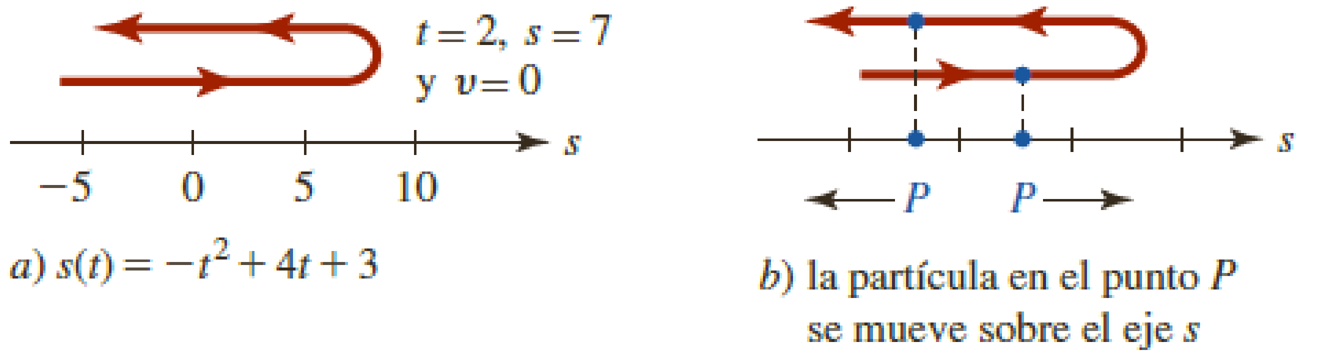


FIGURA 4.1.3 Representación del movimiento de la partícula en el ejemplo 2

Puesto que la aceleración siempre es negativa, la velocidad siempre es decreciente. Observe que $v(t) = 2(-t + 2) > 0$ para $t < 2$ y $v(t) = 2(-t + 2) < 0$ para $t > 2$. Si se deja que el tiempo t sea negativo y también positivo, entonces la partícula se mueve hacia la derecha para el intervalo de tiempo $(-\infty, 2)$ y se mueve hacia la izquierda para el intervalo de tiempo $(2, \infty)$. El movimiento puede representarse por la gráfica que se muestra en la FIGURA 4.1.3*a*). Puesto que el movimiento en realidad se lleva a cabo *sobre* la recta horizontal, usted debe imaginar el movimiento de un punto P que corresponde a la proyección de un punto en la gráfica sobre la recta horizontal. Vea la figura 4.1.3*b*).

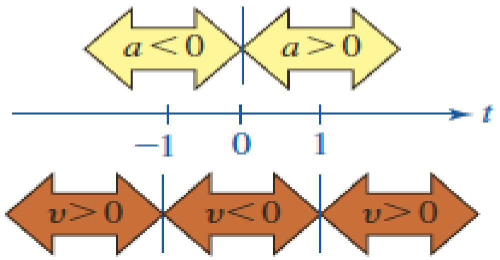


FIGURA 4.1.4 Signos de $v(t)$ y $a(t)$ en el ejemplo 3

EJEMPLO 3 Partícula que desacelera/acelera

Una partícula se mueve sobre una recta horizontal según la función posición $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$. Determine los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula desacelera y los intervalos de tiempo sobre los cuales acelera.

Solución Los signos algebraicos de las funciones velocidad y aceleración

$$v(t) = t^2 - 1 = (t + 1)(t - 1) \qquad \text{y} \qquad a(t) = 2t$$

se muestran sobre la escala de tiempo en la FIGURA 4.1.4. Puesto que $v(t)$ y $a(t)$ tienen signos opuestos sobre $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$, la partícula desacelera sobre estos intervalos de tiempo; $v(t)$ y $a(t)$ tienen el mismo signo algebraico sobre $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$, de modo que la partícula acelera sobre estos intervalos de tiempo. ■

EJEMPLO 4 Movimiento de una partícula

Un objeto se mueve sobre una recta horizontal según la función posición $s(t) = t^4 - 18t^2 + 25$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Use una gráfica para representar el movimiento durante el intervalo de tiempo $[-4, 4]$.

Solución La función velocidad es

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 4t^3 - 36t = 4t(t + 3)(t - 3)$$

y la función aceleración es

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = 12t^2 - 36 = 12\left(t + \sqrt{3}\right)\left(t - \sqrt{3}b\right).$$

4.2 Razones de cambio relacionadas

Introducción En esta sección abordaremos las **razones de cambio relacionadas.** La derivada dy/dx de una función $y = f(x)$ es su razón de cambio instantánea con respecto a la variable x. En la sección precedente vimos que cuando una función $s = s(t)$ describe la posición de un objeto que se mueve sobre una recta horizontal o vertical, la razón de cambio con el tiempo ds/dt se interpreta como la velocidad del objeto. En general, una razón de cambio con el tiempo es la respuesta a la pregunta: ¿cuán rápido cambia la cantidad?

Por ejemplo, si V representa el volumen que cambia con el tiempo, entonces dV/dt es la razón, o cuán rápido cambia el volumen con respecto al tiempo t.

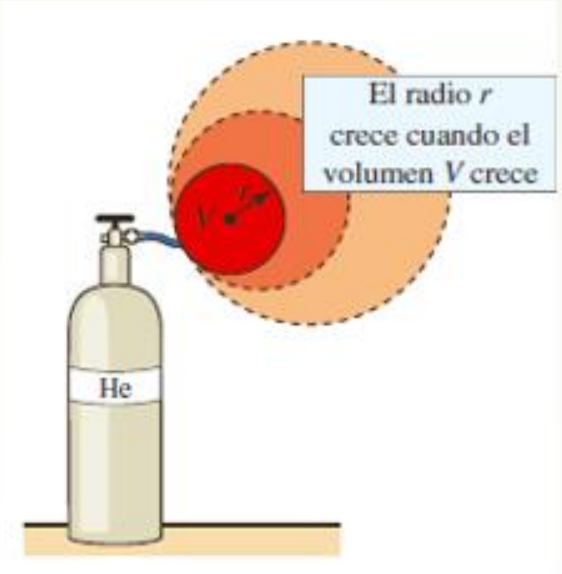
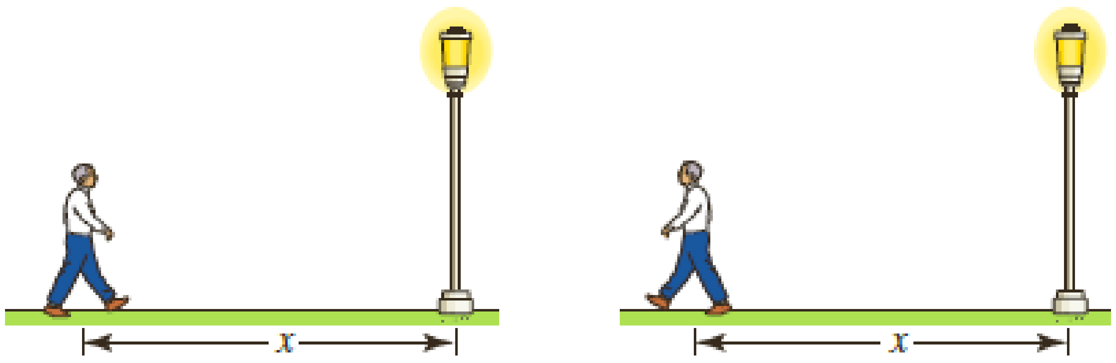


FIGURA 4.2.1 A medida que un globo esférico se llena con gas, su volumen, radio y área superficial cambian con el tiempo

Una razón de, por ejemplo, $dV/dt = 5$ pies^3/s significa que el volumen aumenta 5 pies cúbicos cada segundo. Vea la FIGURA 4.2.1.

Por ejemplo, si V representa el volumen que cambia con el tiempo, entonces dV/dt es la razón, o cuan rápido cambia el volumen con respecto al tiempo t.

Una razón de, por ejemplo, $dV/dt = 5$ pies^3/s significa que el volumen aumenta 5 pies cúbicos cada segundo. Vea la FIGURA 4.2.1.



a) $dx/dt < 0$ b) $dx/dt > 0$

FIGURA 4.2.2 x decreciente en a); x creciente en b)

En forma semejante, si una persona camina *hacia* el poste mostrado en la FIGURA 4.2.2 a razón constante de 3 pies/s, entonces sabemos que $dx/dt = -3$ pies/s.

Por otra parte, si la persona se *aleja* del poste, entonces $dx/dt = 3$ pies/s.

Las razones negativa y positiva significan, por supuesto, que la distancia x de la persona al poste disminuye (3 pies cada segundo) y aumenta (3 pies cada segundo), respectivamente.

Regla de potencias para funciones Recuerde por (6) de la sección 3.6 que si y denota una función de x, entonces con la regla de potencias para funciones obtenemos

$$\frac{d}{dx} y^n = ny^{n-1} \frac{dy}{dx}, \tag{1}$$

donde n es un número real. Por supuesto, (1) es aplicable a cualquier función; por ejemplo r, x o z, que dependa de la variable t:

$$\frac{d}{dt} r^n = nr^{n-1} \frac{dr}{dt}, \qquad \frac{d}{dt} x^n = nx^{n-1} \frac{dx}{dt}, \qquad \frac{d}{dt} z^n = nz^{n-1} \frac{dz}{dt}. \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Uso de (2)

Un globo esférico se expande con el tiempo. ¿Cómo se relaciona la razón a que aumenta el volumen con la razón a la que aumenta el radio?

Solución En el instante t, el volumen V de una esfera es una función del radio r; es decir, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Por tanto, obtenemos las razones relacionadas a partir de la derivada con respecto al tiempo de esta función. Con ayuda del primer resultado en (2), vemos que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{d}{dt} r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(3r^2 \frac{dr}{dt}\right)$$

es lo mismo que

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{razones relacionadas}}}{\frac{dV}{dt}} = 4\pi r^2 \underset{\uparrow}{\frac{dr}{dt}}.$$

■

Directrices para resolver problemas relacionados

i) Lea varias veces con cuidado el problema. Si le es posible, trace un esquema.

ii) Identifique con símbolos todas las cantidades que cambian con el tiempo.

iii) Escriba todas las razones que se **proporcionan**. Use notación de derivadas para escribir la razón que desea **encontrar**.

iv) Escriba una ecuación o una función que relacione todas las variables que haya introducido.

v) Diferencie con respecto al tiempo t la ecuación o la función encontrada en el paso *iv*). Este paso puede requerir el uso de diferenciación implícita. La ecuación resultante después de la diferenciación relaciona las razones de cambio con el tiempo de la variable.

Un globo esférico se infla con aire a razón de 20 pies^3/min. ¿A qué razón cambia el radio cuando éste es de 3 pies?

Solución Como se muestra en la figura 4.2.1, denotamos el radio del globo con r y su volumen con V. Ahora, las interpretaciones de "Un globo esférico se infla … a razón de 20 pies^3/min" y "¿A qué razón cambia el radio cuando es de 3 pies?" son, respectivamente, la razón que tenemos

$$\textbf{Dado: } \frac{dV}{dt} = 20 \text{ pies}^3/\text{min}$$

y la razón que se busca

$$\textbf{Encontrar: } \left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=3}.$$

Debido a que por el ejemplo 1 ya sabemos que

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

es posible sustituir la razón constante $dV/dt = 20$; es decir, $20 = 4\pi r^2(dr/dt)$. Al despejar dr/dt en la última ecuación obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{20}{4\pi r^2} = \frac{5}{\pi r^2}.$$

Por tanto, $$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=3} = \frac{5}{9\pi} \text{ pies/min} \approx 0.18 \text{ pies/min}$$ ■