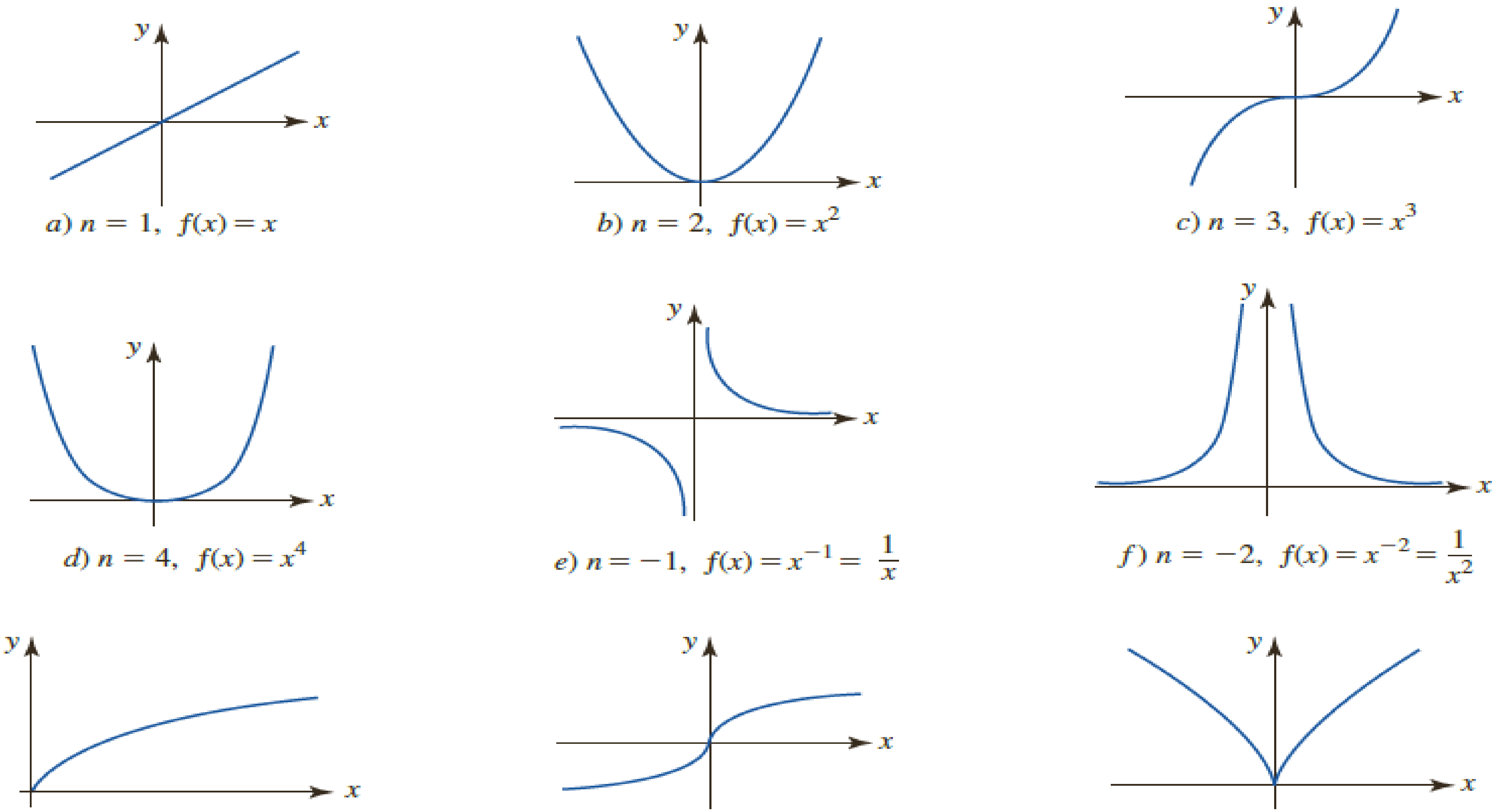
# Repaso de Cálculo



a) $n = 1,\ f(x) = x$

b) $n = 2,\ f(x) = x^2$

c) $n = 3,\ f(x) = x^3$

d) $n = 4,\ f(x) = x^4$

e) $n = -1,\ f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

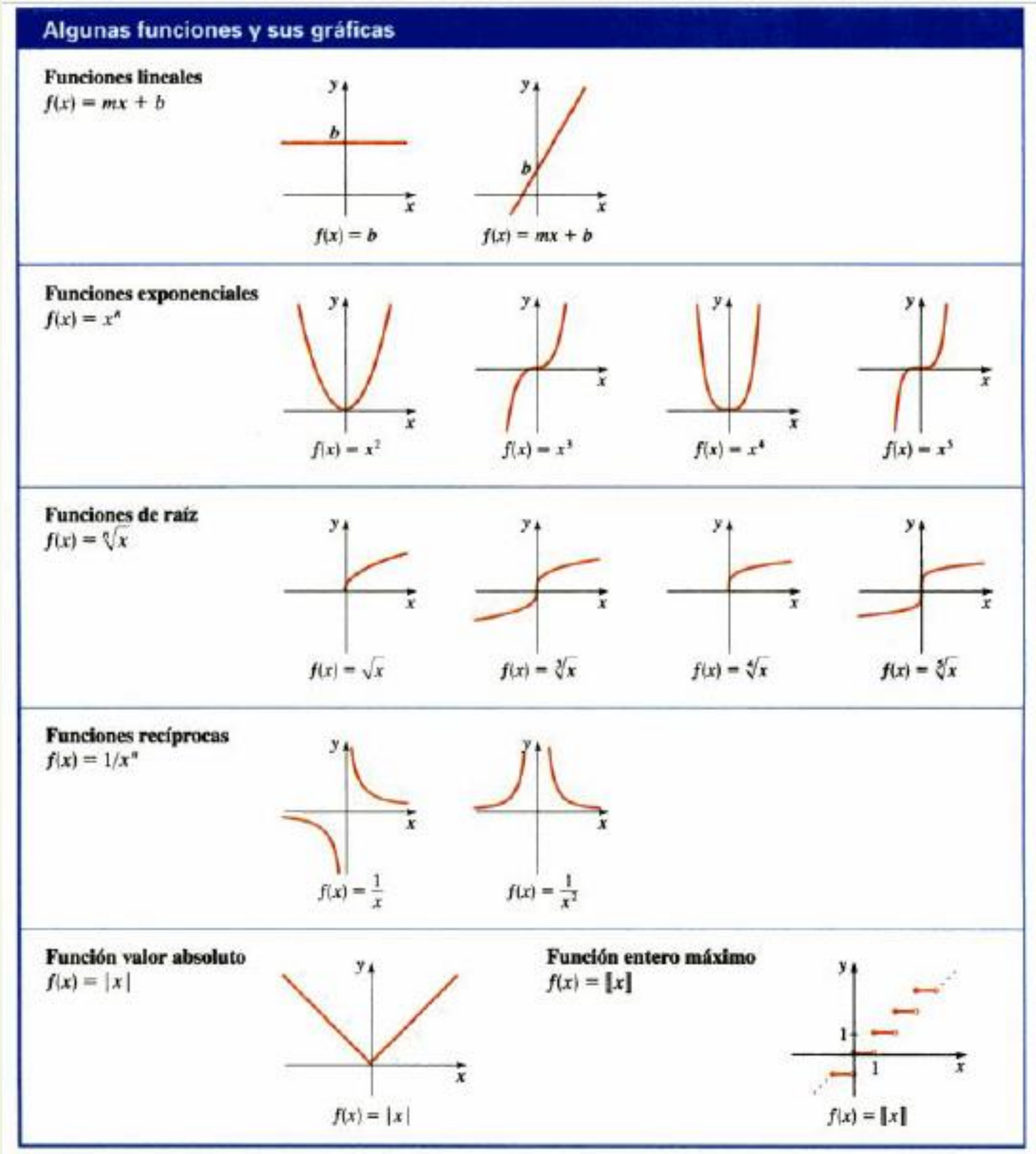
f) $n = -2,\ f(x) = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$

g) $n = \dfrac{1}{2},\ f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$

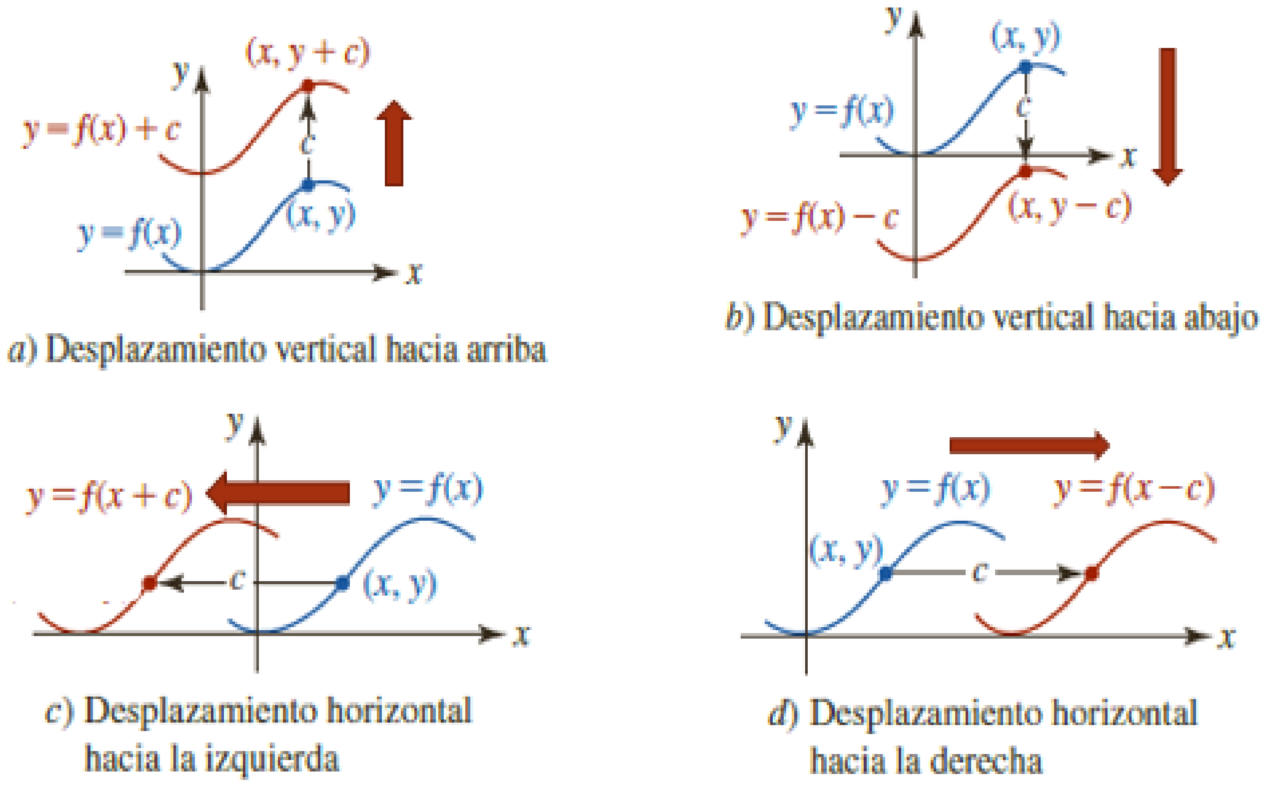
h) $n = \dfrac{1}{3},\ f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$

i) $n = \dfrac{2}{3},\ f(x) = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$

**FIGURA 1.2.1** Breve catálogo de gráficas de funciones potencia


Algunas funciones y sus gráficas
Funciones lineales
f(x) = mx + b
f(x) = b
f(x) = mx + b
Funciones exponenciales
f(x) = x^n
f(x) = x^2
f(x) = x^3
f(x) = x^4
f(x) = x^5
Funciones de raíz
f(x) = ⁿ√x
f(x) = √x
f(x) = ∛x
f(x) = ∜x
f(x) = ⁵√x
Funciones recíprocas
f(x) = 1/x^n
f(x) = 1/x
f(x) = 1/x^2
Función valor absoluto
f(x) = |x|
f(x) = |x|
Función entero máximo
f(x) = ⟦x⟧
f(x) = ⟦x⟧

# RÍGIDAS



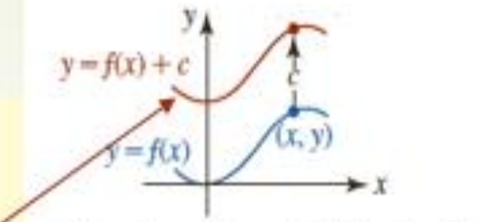

**EJEMPLO** Gráficas desplazadas

**Transformaciones rígidas.** Una **transformación rígida** de una gráfica es una transformación que cambia sólo la *posición* de la gráfica en el plano *xy*, pero no su forma. En realidad es un desplazamiento de la gráfica. Para la gráfica de una función $y = f(x)$ se analizan cuatro tipos de desplazamientos o traslaciones.

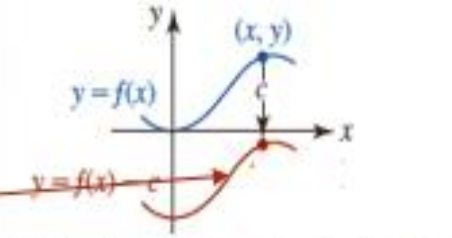
# Traslaciones

Suponga que $y = f(x)$ es una función y $c$ es una constante positiva. Entonces la gráfica de

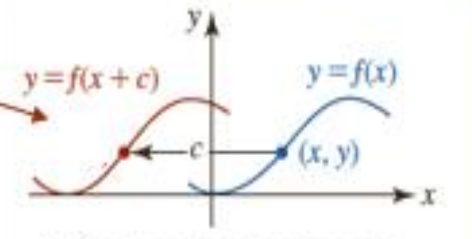
- $y = f(x) + c$ es la gráfica de $f$ desplazada verticalmente **hacia arriba** $c$ unidades,
- $y = f(x) - c$ es la gráfica de $f$ desplazada verticalmente **hacia abajo** $c$ unidades,
- $y = f(x + c)$ es la gráfica de $f$ desplazada horizontalmente **hacia la izquierda** $c$ unidades,
- $y = f(x - c)$ es la gráfica de $f$ desplazada horizontalmente **hacia la derecha** $c$ unidades.



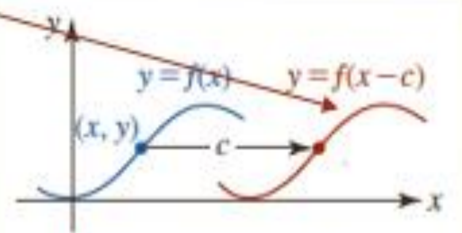
*a)* Desplazamiento vertical hacia arriba



*b)* Desplazamiento vertical hacia abajo



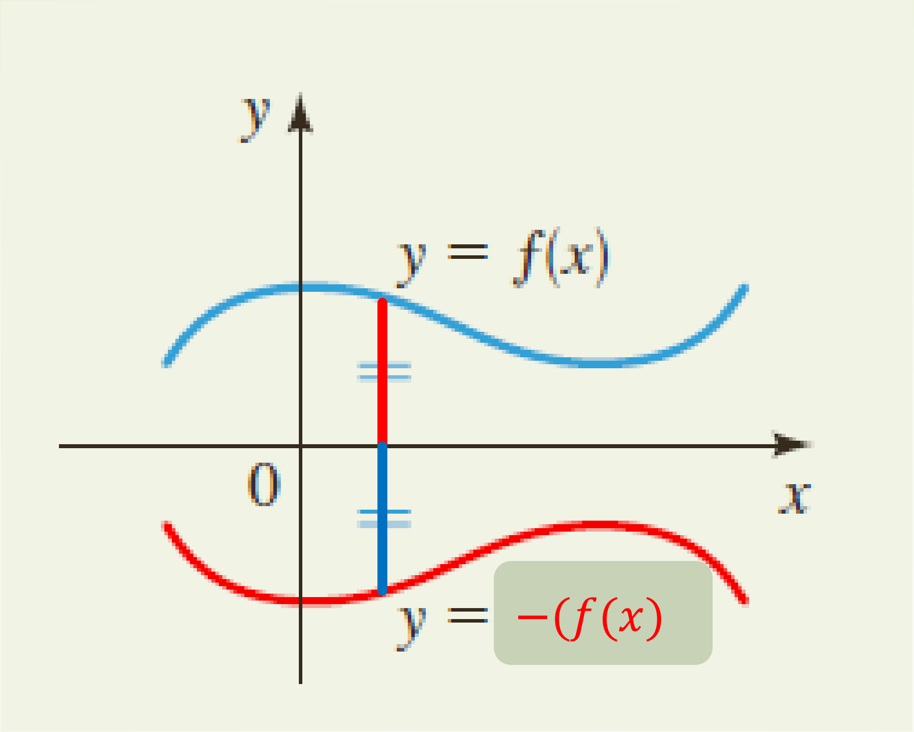
*c)* Desplazamiento horizontal hacia la izquierda



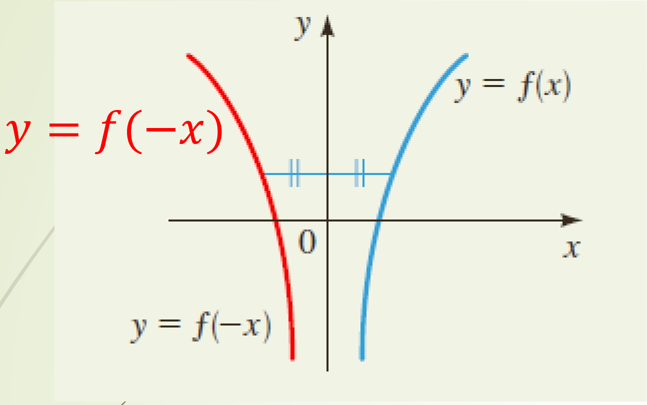
## Reflexiones

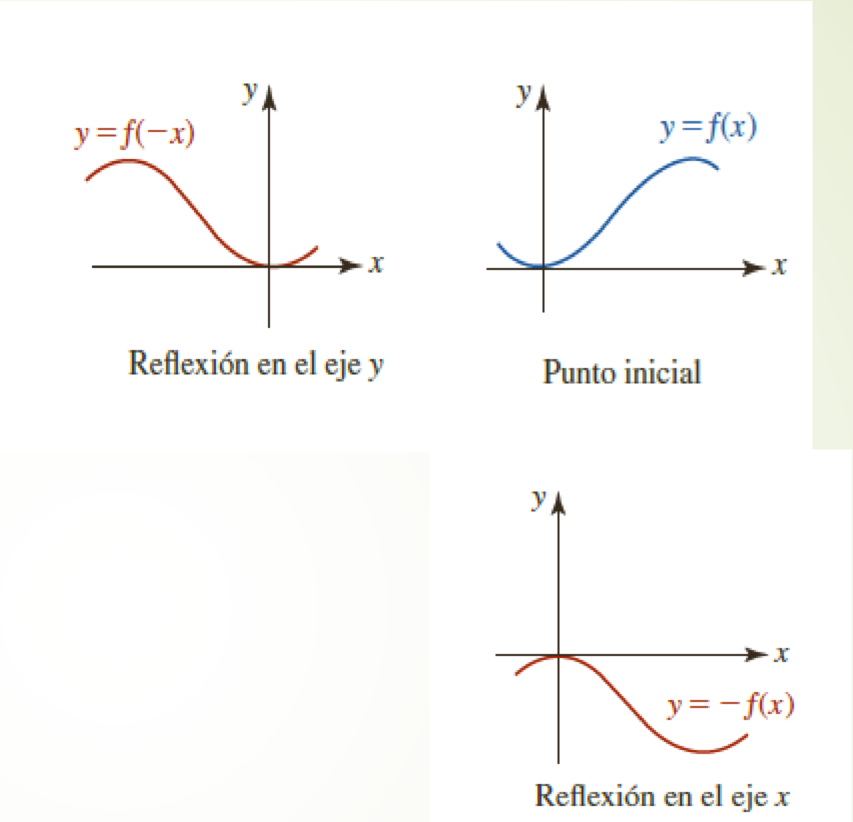
Suponga que $y = f(x)$ es una función. Entonces la gráfica de

- $y = -f(x)$ es la gráfica de $f$ reflejada en el **eje** $\boldsymbol{x}$,
- $y = f(-x)$ es la gráfica de $f$ reflejada en el **eje** $\boldsymbol{y}$.

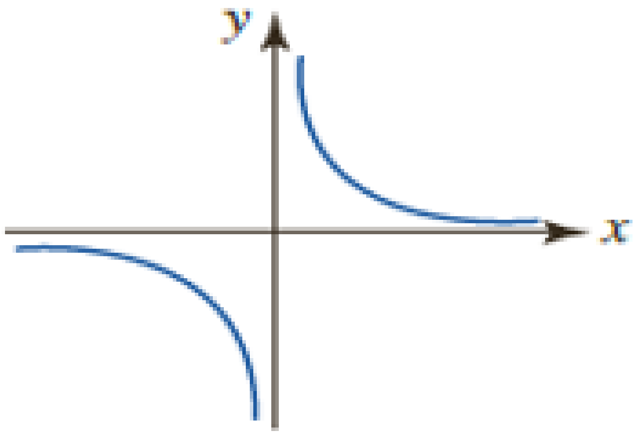



Si multiplico toda  la expresión algebraica  de la función por -1 reflejo la función respecto al eje x.

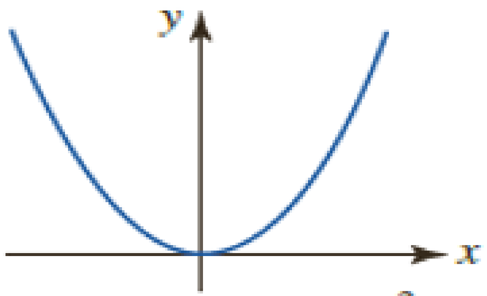


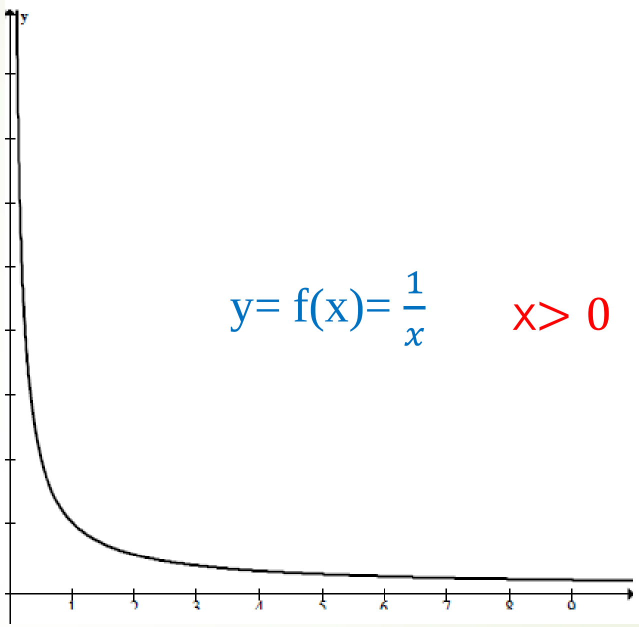

Si la quiero reflejar con respecto al eje $y$, empleo el método del cajón o paréntesis: en el cajón donde esté la $x$ le cambio de signo.

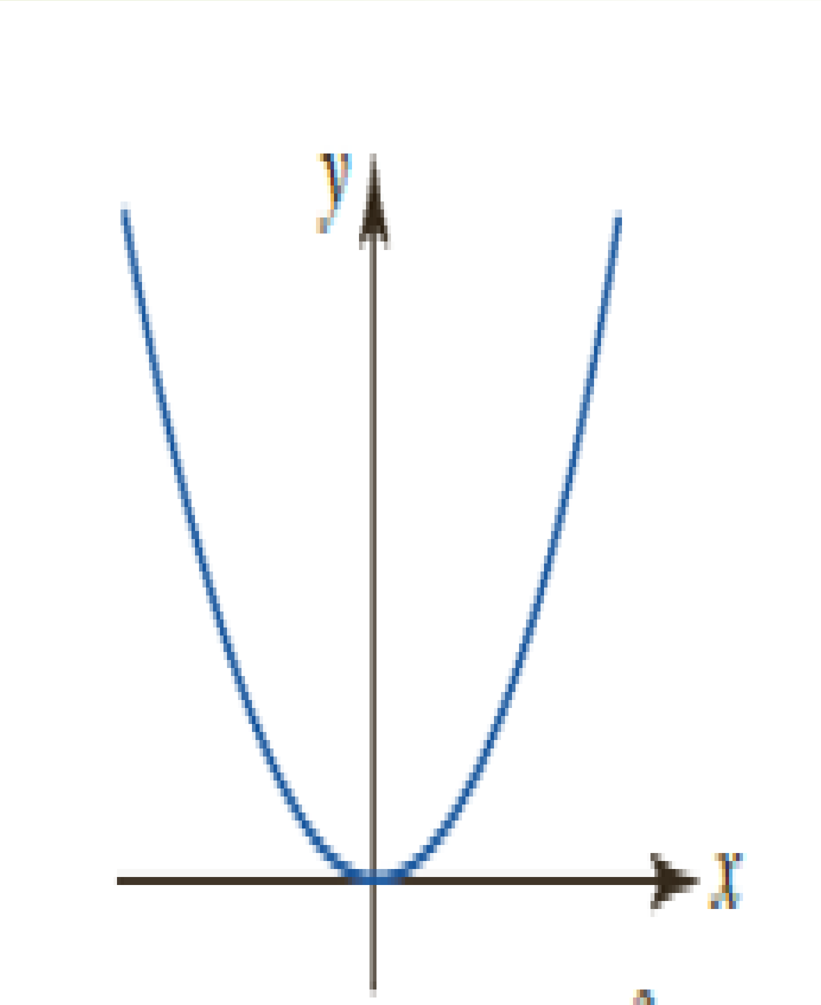



e) $n = -1,\ f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

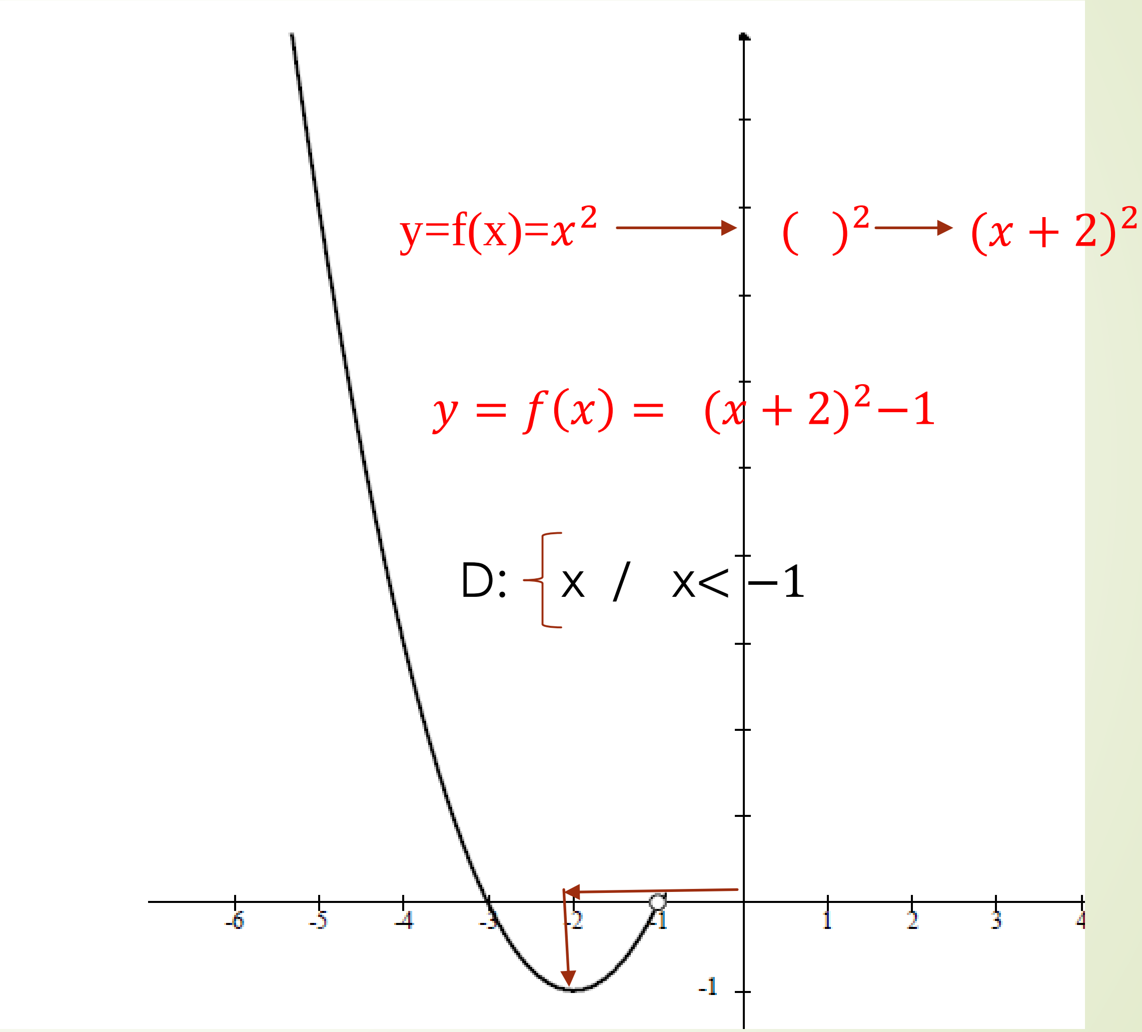


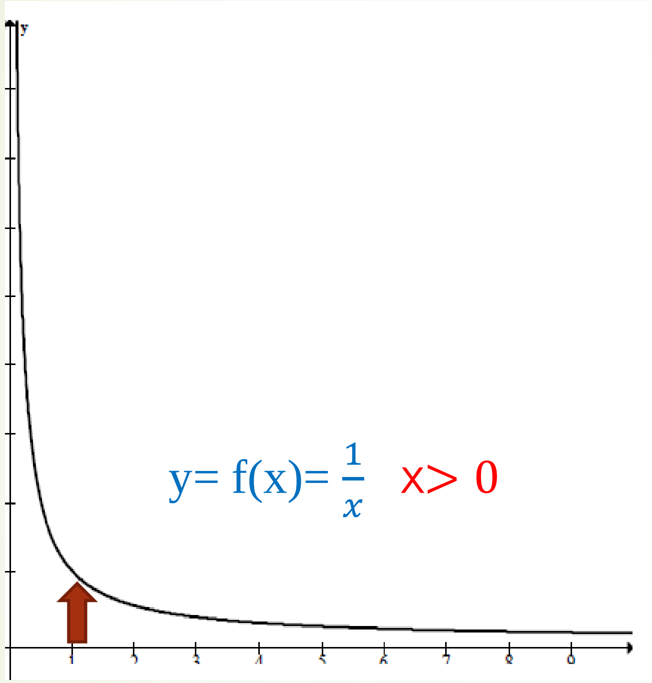

b) $n = 2,\ f(x) = x^2$



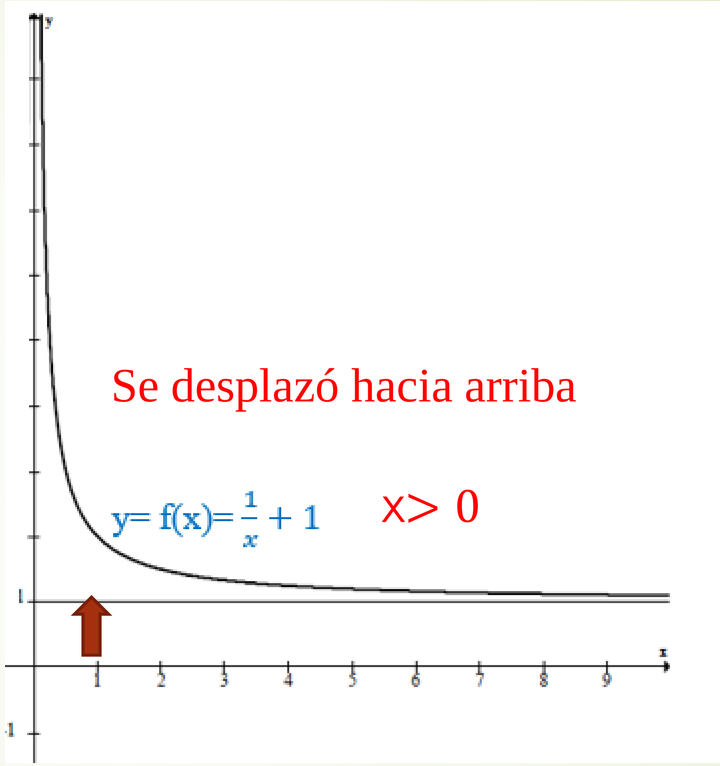



b) $n = 2,\ f(x) = x^2$

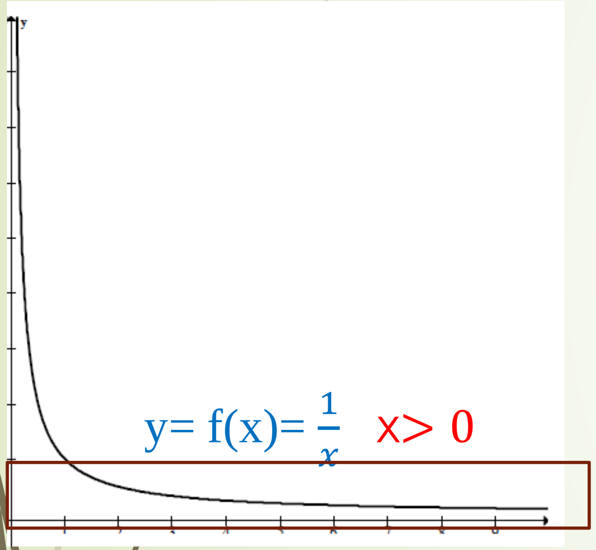




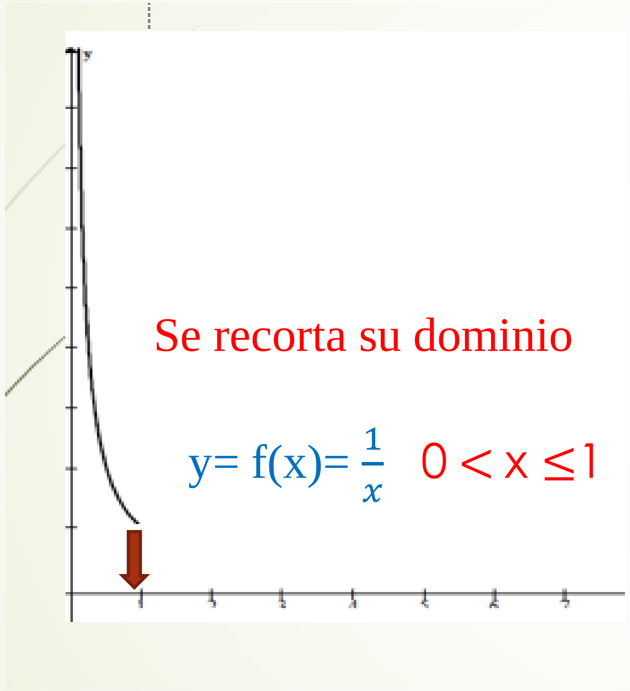
y= f(x)= $\frac{1}{x}$ x> 0

Se desplazó hacia arriba
y= f(x)= $\frac{1}{x} + 1$ x> 0

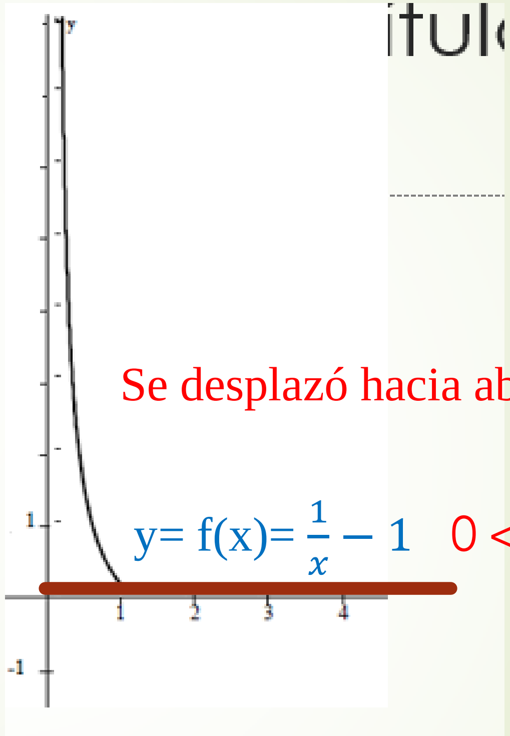


y= f(x)= $\frac{1}{x}$ x> 0



Se recorta su dominio

y= f(x)= $\frac{1}{x}$ $0 < x \leq 1$

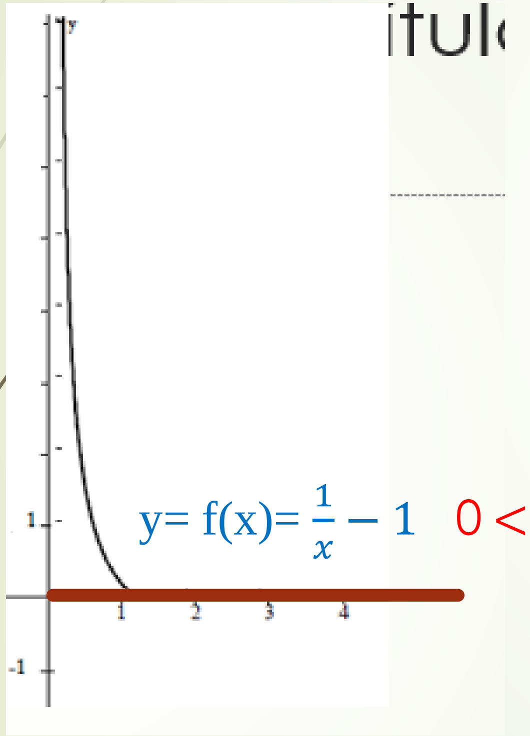



Se desplazó hacia abajo

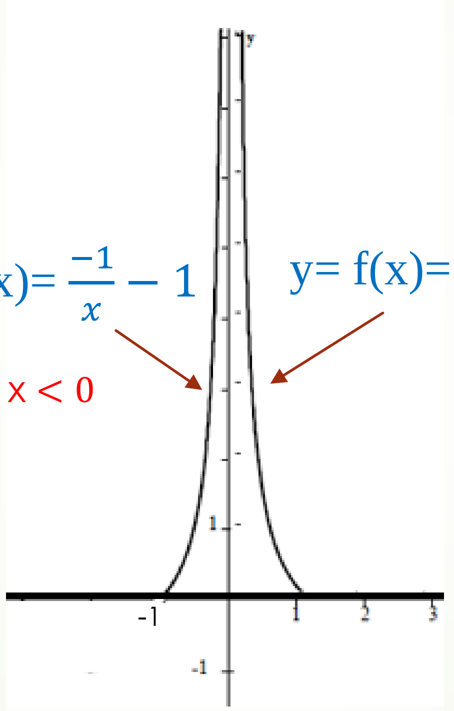
y= f(x)= $\frac{1}{x} - 1$ $0 < x \leq 1$

# Refexión respecto al eje y,  método del cajón

$y = f(x) = \frac{1}{x} - 1$ ⟶ $y = f(x) = \frac{1}{\;} - 1$ ⟶ $y = f(x) = \frac{1}{-x} - 1$ ⟶ $y = f(x) = \frac{-1}{x} - 1$



$y = f(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad 0 < x \leq 1$

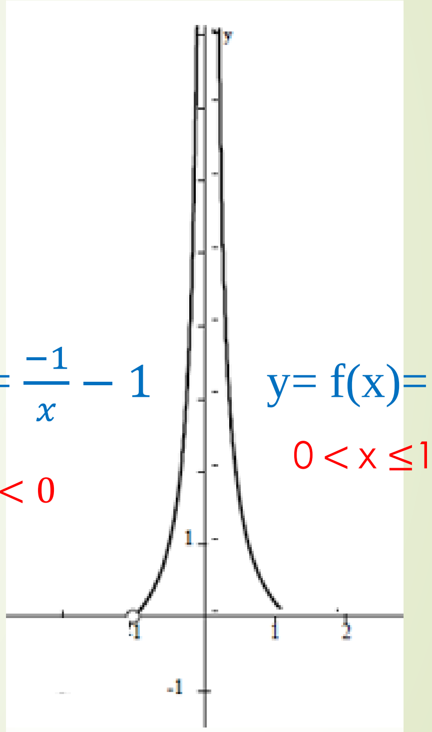




$y = f(x) = \frac{-1}{x} - 1$

$-1 \leq x < 0$

$y = f(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad 0 < x \leq 1$



$y = f(x) = \frac{-1}{x} - 1$

$-1 < x < 0$

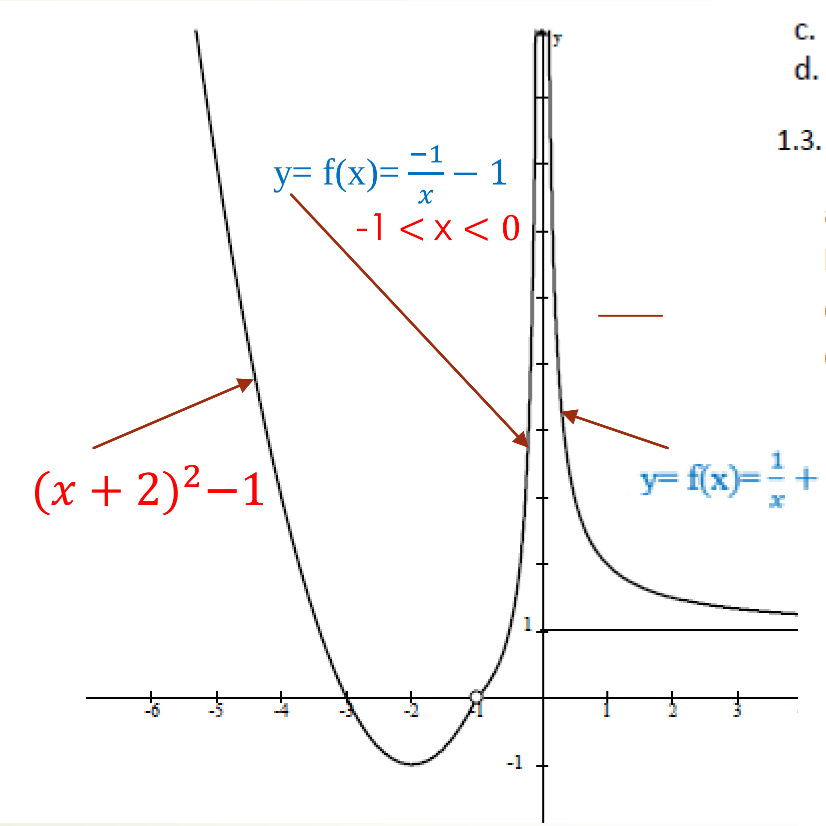
$y = f(x) = \frac{1}{x} - 1$

$0 < x \leq 1$

1.2. (**0.25**) El dominio y el rango de la función son, respectivamente

a. $Dominio: \{x/x \in (-\infty,\infty)\}$ y $Rango: \{y/y \in (-1,\infty)\}$
b. $Dominio: \{x/x \in (-\infty,-1] \cup (-1,0) \cup (0,\infty)\}$ y $Rango: \{y/y \in (1,\infty)\}$
c. $Dominio: \{x/x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,\infty)\}$ y $Rango: \{y/y \in [-1,\infty)\}$
d. $Dominio: \{x/x \in (-\infty,-3) \cup (-3,0) \cup (0,\infty)\}$ y $Rango: \{y/y \in (1,\infty)\}$

$y = f(x) = (x+2)^2 - 1$
$x < -1$




y= f(x)= $\frac{1}{x} + 1$   $x > 0$

1.3. (**0.25**) De las afirmaciones que se presentan sólo una es falsa, indique cuál

a. La recta $y = 1$, es asíntota horizontal para el gráfico de la función porque $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$
b. $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, porque $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$
c. $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$, porque $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = 0$
d. La recta $x = 0$ (el eje $y$ ) es asíntota vertical para el gráfico de la función porque $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$

1.4. (**0.25**) El gráfico de la función es discontinuo en $x = -1$. ¿Cuál cree usted que sea la razón de esta discontinuidad?

a. $\lim_{x\to -1} f(x)$ no existe
b. $\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$
c. $-1 \notin dom\, f$
d. $\lim_{x\to -1^+} f(x) \neq \lim_{x\to -1^-} f(x)$

1.5. (**0.25**) La función no es derivable en $x = 0$ porque

a. La función es discontinua en $x = 0$
b. La recta $x = 0$ es una asíntota vertical
c. En $x = 0$ el gráfico de la función tiene un pico
d. $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe

1.6. (**0.25**) ¿De acuerdo con el gráfico que condición hace falta para que la función dada sea derivable en $x = -1$ ?

a. $f$ esté definida en $x = -1$, es decir, $-1 \in dom\, f$
b. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x)$
c. $f(-1)$ esté definida y $\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ exista
d. La recta $y = 0$ (eje $x$ ) sea una asíntota horizontal para el gráfico de la función

**Definición 2.5.1** Asíntota vertical

Se dice que una recta $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de una función $f$ si por lo menos una de las seis afirmaciones en (3) es verdadera.

En general, cualquier límite de los seis tipos

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty, && \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty, \\ &\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty, && \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty, \qquad (3) \\ &\lim_{x\to a} f(x) = -\infty, && \lim_{x\to a} f(x) = \infty, \end{aligned}$$

**Definición 2.3.1** Continuidad en $a$

Se dice que una función $f$ es **continua** en un número $a$ si

*i*) $f(a)$ está definido, *ii*) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y *iii*) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si alguna de las condiciones en la definición 2.3.1 no se cumple, entonces se dice que $f$ es **discontinua** en el número $a$.

- Por tanto, las condiciones para continuidad en un punto a son:

1. La función debe de estar definida en el punto en cuestión.
2. Debe tener límite en ese punto por los dos lados.
3. El valor obtenido en 1 debe de ser igual al obtenido en 2.

# Ha o

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (2)$$

**Diferenciabilidad** Si el límite en (2) existe para un número $x$ dado en el dominio de $f$, se dice que la función es **diferenciable** en $x$. Si una función $f$ es diferenciable en todo número $x$ en los intervalos abiertos $(a, b)$, $(-\infty, b)$ y $(a, \infty)$, entonces $f$ es **diferenciable sobre el intervalo abierto**. Si $f$ es diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$, entonces se dice que $f$ es **diferenciable en todas partes**.

**Dónde $f$ no es diferenciable** Una función no tiene derivada en $x = a$ si

*i*) la función es discontinua en $x = a$, o
*ii*) la gráfica de $f$ tiene un pico en $(a, f(a))$.

Además, puesto que la derivada proporciona la pendiente, $f$ no es diferenciable

*iii*) en un punto $(a, f(a))$ en el cual la recta tangente es vertical.

El dominio de la derivada $f'$, definido por (2), es el conjunto de números $x$ para los cuales el límite existe. Por tanto, el dominio de $f'$ necesariamente es un subconjunto del dominio de $f$.