53. $x^2(x-2)+x(x-2)^2$ **54.** $\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+5x+3}$

55. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+8x+16}\cdot\dfrac{3x+12}{x-1}$ **56.** $\dfrac{t^3-1}{t^2-1}$

57. $\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-6x+5}\div\dfrac{x^2-x-12}{x^2-1}$

58. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{(x-2)^2}$ **59.** $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}$

60. $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{2}{x^2-x-2}$

61. $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}}{x-2}$ **62.** $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}}$

63. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ (racionalice el denominador)

64. $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ (racionalice el numerador)

65–80 ■ Determine todas las soluciones reales de la ecuación.

65. $7x-6=4x+9$ **66.** $8-2x=14+x$

67. $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{3x}{3x-6}$ **68.** $(x+2)^2=(x-4)^2$

69. $x^2-9x+14=0$ **70.** $x^2+24x+144=0$

71. $2x^2+x=1$ **72.** $3x^2+5x-2=0$

73. $4x^3-25x=0$ **74.** $x^3-2x^2-5x+10=0$

75. $3x^2+4x-1=0$ **76.** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x-1}=3$

77. $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{8}{x^2-4}$

78. $x^4-8x^2-9=0$

79. $|x-7|=4$ **80.** $|2x-5|=9$

81. El dueño de una tienda vende uva pasa a 3.20 dólares la libra y nueces a 2.40 dólares cada libra. Decide mezclar las uvas pasa y las nueces y vende 50 libras de la mezcla a 2.72 dólares cada libra. ¿Qué cantidades de uva pasa y de nueces debe usar?

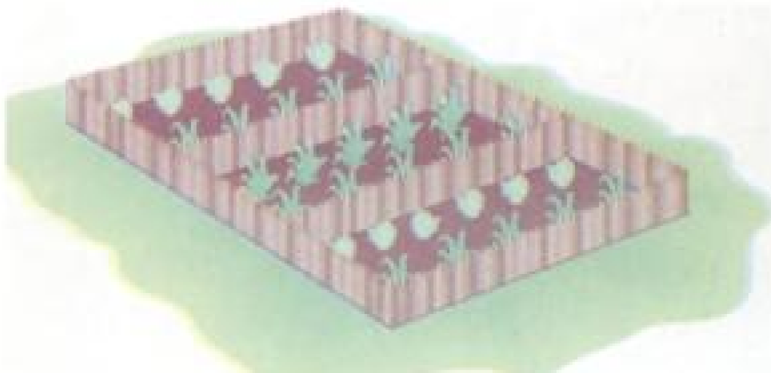
82. Anthony sale de Kingstown a las 2:00 PM y maneja su automóvil a 45 millas por hora hasta Queensville, a 160 millas de distancia. A las 2:15 PM, Helen sale de Queensville y se dirige a Kingstown a 40 millas/h. ¿En qué momento se cruzarán en la carretera?

83. Una mujer viaja en bicicleta 8 millas/h más rápido de lo que ella corre. Cada mañana recorre en bicicleta 4 millas y corre $2\frac{1}{2}$ millas durante un total de una hora de ejercicio. ¿Qué tan rápido corre?

84. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 cm. La suma de las longitudes de los catetos es 28. Calcule lo que mide cada cateto del triángulo.

85. Abbie pinta igual de rápido que Beth y tres veces más rápido que Cathie. Si se tardan 60 min en pintar una sala las tres trabajando juntas, ¿qué tanto se tardaría Abbie si trabajara sola?

86. La dueña de una casa desea cercar tres jardines adyacentes, uno para cada uno de sus niños, como se muestra en la figura. Si cada parcela es de 80 pies cuadrados de área, y tiene a la mano 88 pies de material para cercar, ¿qué dimensiones debe tener cada parcela?



87–94 ■ Resuelva la desigualdad. Exprese la solución usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución en una recta de números reales.

87. $3x-2>-11$

88. $-1<2x+5\le 3$

89. $x^2+4x-12>0$

90. $x^2\le 1$

91. $\dfrac{x-4}{x^2-4}\le 0$

92. $\dfrac{5}{x^3-x^2-4x+4}<0$

93. $|x-5|\le 3$

94. $|x-4|<0.02$

95–98 ■ Resuelva la ecuación o la desigualdad mediante métodos gráficos.

95. $x^2-4x=2x+7$

96. $\sqrt{x+4}=x^2-5$

97. $4x - 3 \geq x^2$

98. $x^3 - 4x^2 - 5x > 2$

99–100 ■ Se dan los puntos P y Q.

a) Grafique P y Q en un plano coordenado.
b) Calcule la distancia desde P hasta Q.
c) Determine el punto medio del segmento PQ.
d) Determine la recta definida por P y Q, y exprese su ecuación en la forma cuando se dan la pendiente y la ordenada al origen.
e) Grafique la circunferencia que pasa por Q y tiene centro en P, y encuentre la ecuación de dicha circunferencia.

99. $P(2, 0)$, $Q(-5, 12)$ **100.** $P(7, -1)$, $Q(2, -11)$

101–102 ■ Grafique la región definida por el conjunto.

101. $\{(x,y) \mid -4 < x < 4 \quad \text{y} \quad -2 < y < 2\}$

102. $\{(x,y) \mid x \geq 4 \quad \text{o} \quad y \geq 2\}$

103. ¿Cuál de los puntos $A(4, 4)$ o $B(5, 3)$ está más cerca al punto $C(-1, -3)$?

104. Encuentre una ecuación de la circunferencia que tiene centro en $(2, -5)$ y radio $\sqrt{2}$.

105. Encuentre una ecuación de la circunferencia que tiene centro en $(-5, -1)$ y pasa por el origen.

106. Encuentre una ecuación de la circunferencia que contiene los puntos $P(2, 3)$ y $Q(-1, 8)$ y cuyo punto medio del segmento PQ es el centro.

107–110 ■ Determine si la ecuación representa una circunferencia, un punto o no tiene gráfica. Si la ecuación es una circunferencia determine el centro y el radio.

107. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$

108. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 8y = \frac{1}{2}$

109. $x^2 + y^2 + 72 = 12x$

110. $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34 = 0$

111–118 ■ Compruebe si la ecuación es simétrica y trace su gráfica.

111. $y = 2 - 3x$

112. $2x - y + 1 = 0$

113. $x + 3y = 21$

114. $x = 2y + 12$

115. $y = 16 - x^2$

116. $8x + y^2 = 0$

117. $x = \sqrt{y}$

118. $y = -\sqrt{1 - x^2}$

119–122 ■ Utilice una calculadora para graficar o una computadora para trazar la gráfica de la ecuación en un rectángulo de visión adecuado

119. $y = x^2 - 6x$

120. $y = \sqrt{5 - x}$

121. $y = x^3 - 4x^2 - 5x$

122. $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

123. Determine una ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, -6)$ y $(2, -4)$.

124. Determine una ecuación de la recta que pasa por el punto $(6, -3)$ y tiene pendiente $-\frac{1}{2}$.

125. Determine una ecuación de la recta cuya intersección con el eje x es 4 y la intersección con el eje y es 12.

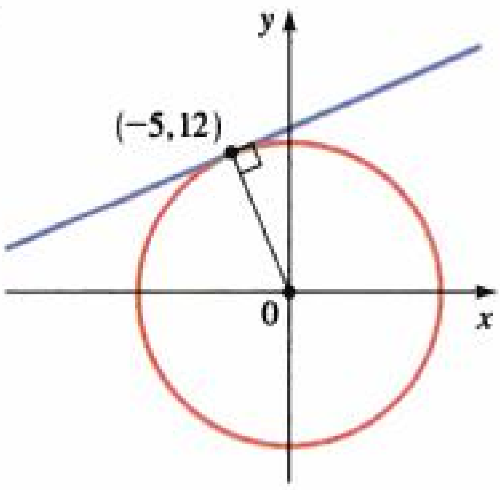
126. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 7)$ y es perpendicular a la recta $x - 3y + 16 = 0$.

127. Determine la ecuación de la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta $3x + 15y = 22$.

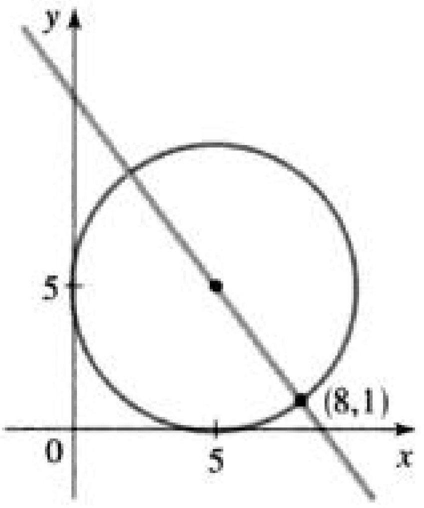
128. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, 2)$ y es paralela a la recta que pasa por $(-1, -3)$ y $(3, 2)$.

129–130 ■ Calcule las ecuaciones de la circunferencia y de la recta de la figura.

129.



130.



131. La ley de Hooke establece que si un peso w se engancha a un resorte que está colgando, entonces la longitud s que se estira el resorte está relacionada linealmente con w. En el caso de un resorte particular tenemos

$$s = 0.3w + 2.5$$

donde s se mide en pulgadas y w en libras.

a) ¿Qué representan en esta ecuación la pendiente y la intersección con el eje s?

b) ¿Qué tan largo es el resorte cuando se le coloca un peso de 5 libras?

132. Margarita empezó a trabajar en una compañía de contabilidad con un salario de 60 000 dólares por año. Tres años más tarde su salario anual se había incrementado a 70 500 dólares. Suponga que su salario se incrementa en forma lineal.

a) Determine una ecuación que relacione su salario anual S y el número de años t que ella trabajó para la compañía.

b) ¿Qué representan la pendiente y la intersección con el eje S?

c) ¿Cuál será su salario después de 12 años de trabajar en esa compañía?

133. Suponga que M varía directamente con z, y $M = 120$ cuando $z = 15$. Plantee la ecuación que expresa esta variación.

134. Suponga que z es inversamente proporcional a y, y que $z = 12$ cuando $y = 16$. Escriba una ecuación que exprese a z en función de y.

135. La intensidad de iluminación I de una luz varía inversamente con el cuadrado de la distancia d de la luz.

a) Escriba este enunciado como una ecuación.

b) Determine la constante de proporcionalidad si se sabe que una lámpara tiene una intensidad de 1000 candelas a una distancia de 8 m.

c) ¿Cuál será la intensidad de esta lámpara a una distancia de 20 m?

136. La frecuencia de una cuerda que vibra a tensión constante es inversamente proporcional a su longitud. Si la cuerda de un violín de 12 pulg de largo vibra 440 veces por segundo, ¿cuánto se le debe recortar para que vibre 660 veces por segundo?

137. La velocidad final de un paracaidista es directamente proporcional a la raíz cuadrada de su peso. Un paracaidista de 160 libras de peso adquiere una velocidad final de 9 millas/h. ¿Cuál es la velocidad final de un paracaidista que pesa 240 lb?

138. El alcance máximo de un proyectil es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad. Un pitcher lanza la pelota a 60 millas/h, con un alcance máximo de 242 pies. ¿Cuál será el alcance máximo si lanza la pelota a 70 millas/h?

1 Evaluación

1. a) Grafique los intervalos $(-5, 3]$ y $(2, \infty)$ sobre la recta de números reales.
b) Exprese las desigualdades $x \leq 3$ y $-1 \leq x < 4$ en la notación de intervalos.
c) Determine la distancia entre -7 y 9 en la recta numérica.

2. Evalúe cada expresión.
a) $(-3)^4$ b) -3^4 c) 3^{-4} d) $\dfrac{5^{23}}{5^{21}}$ e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ f) $16^{-3/4}$

3. Escriba cada cantidad en notación científica.
a) 186 000 000 000 b) 0.0000003965

4. Simplifique cada expresión. Escriba su respuesta final sin exponentes negativos.
a) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$ b) $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$ c) $\left(\dfrac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$

d) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ e) $\dfrac{x^2}{x^2 - 4} - \dfrac{x + 1}{x + 2}$ f) $\dfrac{\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}}{\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}}$

5. Racionalice el denominador y simplifique: $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} - 2}$

6. Ejecute las operaciones indicadas y simplifique.
a) $3(x + 6) + 4(2x - 5)$ b) $(x + 3)(4x - 5)$ c) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$
d) $(2x + 3)^2$ e) $(x + 2)^3$

7. Factorice del todo cada expresión.
a) $4x^2 - 25$ b) $2x^2 + 5x - 12$ c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
d) $x^4 + 27x$ e) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ f) $x^3y - 4xy$

8. Encuentre todas las soluciones reales.
a) $x + 5 = 14 - \frac{1}{2}x$ b) $\dfrac{2x}{x + 1} = \dfrac{2x - 1}{x}$ c) $x^2 - x - 12 = 0$
d) $2x^2 + 4x + 1 = 0$ e) $\sqrt{3 - \sqrt{x + 5}} = 2$ f) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
g) $3|x - 4| = 10$

9. Mary maneja su automóvil desde Amity hasta Belleville a una velocidad de 50 millas/h. En el camino de regreso iba a una velocidad de 60 millas/h. El viaje total fue de $4\frac{2}{5}$ horas. Calcule la distancia entre estas dos ciudades.

10. Una parcela rectangular es 70 pies más larga de lo que mide el ancho. Cada diagonal mide 130 pies. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

11. Resuelva todas las desigualdades. Escriba la respuesta usando notación de intervalos, y grafique la solución en una recta numérica.
a) $-4 < 5 - 3x \leq 17$ b) $x(x - 1)(x + 2) > 0$
c) $|x - 4| < 3$ d) $\dfrac{2x - 3}{x + 1} \leq 1$

12. Un frasco de un medicamento se va a almacenar a una temperatura entre 5 °C y 10 °C. ¿Qué temperatura le corresponde en la escala Fahrenheit? [*Nota:* las temperaturas Fahrenheit (F) y Celsius (C) cumplen la relación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.]

13. ¿Para qué valores de x la expresión $\sqrt{6x - x^2}$ está definida como un número real?

14. Resuelva la ecuación y la desigualdad gráficamente.

a) $x^3 - 9x - 1 = 0$ **b)** $x^2 - 1 \leq |x + 1|$

15. **a)** Grafique los puntos $P(0, 3)$, $Q(3, 0)$ y $R(6, 3)$ en el plano coordenado. ¿Dónde se debe localizar el punto S para que $PQRS$ sea un cuadrado?

b) Determine el área de $PQRS$.

16. **a)** Trace la gráfica de $y = x^2 - 4$.

b) Determine dónde corta la gráfica a los ejes x y y.

c) ¿La gráfica es simétrica con respecto al eje x, al eje y o al origen?

17. Sean $P(-3, 1)$ y $Q(5, 6)$ dos puntos en el plano coordenado.

a) Grafique P y Q en un plano de coordenadas.

b) Calcule la distancia entre P y Q.

c) Determine el punto medio del segmento PQ.

d) Determine la pendiente de la recta que contiene a P y Q.

e) Encuentre la bisectriz perpendicular a la recta que contiene a P y a Q.

f) Calcule la ecuación de la circunferencia para la cual el segmento PQ es un diámetro.

18. Calcule el centro y el radio de cada circunferencia y trace la gráfica.

a) $x^2 + y^2 = 25$ **b)** $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ **c)** $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 6 = 0$

19. Escriba la ecuación lineal $2x - 3y = 15$ en la forma cuando se dan la pendiente y la ordenada al origen, y grafique. ¿Qué son la pendiente y la ordenada al origen?

20. Encuentre una ecuación para la recta con la propiedad dada.

a) Para por el punto $(3, -6)$ y es paralela a la recta $3x + y - 10 = 0$.

b) Corta al eje x en 6 y la ordenada al origen es 4.

21. Un geólogo utiliza una sonda para medir la temperatura T (en °C) del suelo a distintas profundidades por abajo de la superficie, y observa que a una profundidad de x cm, la temperatura está representada por la ecuación $T = 0.08x - 4$.

a) ¿Cuál es la temperatura a una profundidad de un metro (100 cm)?

b) Trace una gráfica de la ecuación lineal.

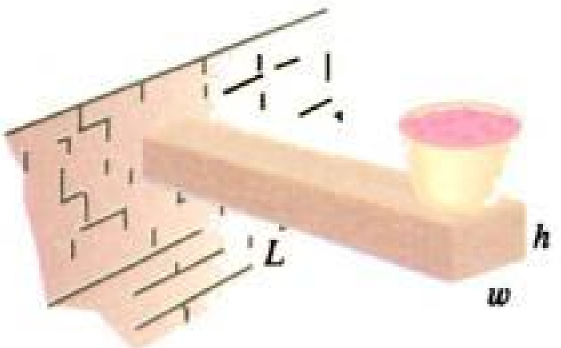
c) ¿Qué representan la pendiente, la intersección con el eje x y la intersección con el eje T de la gráfica de esta ecuación?

22. El peso máximo M que puede ser soportado por una viga es conjuntamente proporcional a su ancho w, y al cuadrado de su peralte h, e inversamente proporcional a su largo L.

a) Plantee una ecuación que exprese esta proporcionalidad.

b) Determine la constante de proporcionalidad si una viga de 4 pulg de ancho, 6 pulg de peralte y 12 pies de largo puede soportar un peso de 4800 lb.

c) Si una viga de 10 pies fabricada con el mismo material mide 3 pulg de ancho y 10 pulg de peralte, ¿cuál es el peso máximo que soporta?

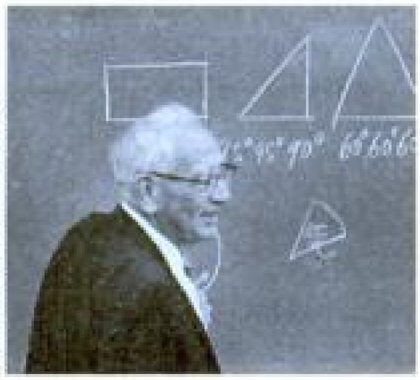


Si encontró dificultad en alguno de los problemas podría revisar la sección de este capítulo que se señala enseguida.

Si tuvo dificultad con este problema del examen	Repase esta sección
1	Sección 1.1
2, 3, 4(a), 4(b), 4(c)	Sección 1.2
4(d), 4(e), 4(f), 5	Sección 1.4
6, 7	Sección 1.3
8	Sección 1.5
9, 10	Sección 1.6
11, 12, 13	Sección 1.7
14	Sección 1.9
15, 16, 17(a), 17(b)	Sección 1.8
17(c), 17(d)	Sección 1.10
17(e), 17(f), 18	Sección 1.8
19, 20, 21	Sección 1.10
22	Sección 1.11

Enfoque en la resolución de problemas

Principios generales



Stanford University News Service

George Polya (1887-1985) es famoso entre los matemáticos por sus ideas acerca de la resolución de problemas. Sus conferencias acerca de la resolución de problemas en Stanford University atraían a grandes cantidades de personas a quienes mantenía al borde de sus asientos, llevándolos a descubrir soluciones por sí mismos. Era capaz de hacerlo debido a su profundo conocimiento de los fenómenos psicológicos que hay en el momento de resolver un problema. Su obra mejor conocida *How To Solve It* está traducida a 15 idiomas. Decía que Euler (véase pág. 288) era único entre los grandes matemáticos porque explicaba *cómo* había encontrado sus resultados. Polya decía a menudo a sus alumnos: "Sí, ya veo que tu demostración es correcta, pero ¿cómo la descubriste?" En el prefacio del libro *How To Solve It*, Polya escribe "Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay un grano de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Su problema podrá ser modesto, pero si desafía a su curiosidad y lo lleva a poner en marcha sus facultades inventivas, y si usted resuelve el problema con sus propios medios, experimentará la fuerza y la alegría del triunfo del descubrimiento".

No hay reglas difíciles ni rápidas que aseguren el éxito al resolver problemas. Pero es posible esbozar unos pasos generales en el proceso de la resolución de problemas y dar principios que son útiles para resolver ciertos problemas. Estos pasos y principios son sólo sentido común hecho explícito. Además, son adaptaciones del agudo libro de George Polya *How To Solve It*.

1. Entienda el problema

El primer paso es leer el problema y estar seguro de que ya lo entendió. Hágase usted mismo las preguntas siguientes:

¿Cuál es la incógnita?
¿Cuáles son las cantidades dadas?
¿Cuáles son las condiciones dadas?

Para cualquier problema es útil

hacer un diagrama

e identificar en el mismo diagrama las cantidades dadas y las requeridas.

Por lo regular es necesario

introducir una notación conveniente

Al elegir símbolos para las cantidades desconocidas, a menudo usamos letras como a, b, c, m, n, x y y, pero en algunos casos ayuda usar iniciales o símbolos sugerentes, por ejemplo, V para volumen o t para el tiempo.

2. Piense en un plan

Halle una conexión entre la información dada y la incógnita, que le permita calcularla. Muchas veces ayuda preguntarse uno mismo: "¿Cómo puedo relacionar la información dada con la incógnita?". Si usted no ve la conexión en forma inmediata, las ideas siguientes podrían ser útiles para trazar un plan.

- **Trate de identificar algo familiar**

Relacione la situación dada con un conocimiento anterior. Examine la incógnita y trate de recordar un problema más conocido que tiene una incógnita similar.

- **Intente identificar patrones**

Ciertos problemas se resuelven cuando se identifica que hay un patrón. El patrón podría ser geométrico o numérico o algebraico. Si puede ver regularidad o repetición en un problema, entonces usted sería capaz de adivinar qué patrón es y demostrarlo.

- **Use la analogía**

Trate de pensar en un problema análogo, es decir, que sea semejante o que esté relacionado, pero que sea más fácil que el original. Si puede resolver el problema similar más sencillo, entonces esto le podría dar las pistas que necesita para resolver el problema original más difícil. Por ejemplo, si un problema contiene números muy grandes, podría primero intentar con un problema similar con números más pequeños. O bien, si el problema es de geometría tridimensional, podría buscar algo similar en geometría bidimensional. O si el problema con el que empieza es uno muy general, podría tratar primero con algún caso especial.

- **Introduzca algo nuevo**

Algunas veces necesitará introducir algo nuevo —un auxiliar— para lograr la co-nexión entre lo que se tiene y lo que se ignora. Por ejemplo, en un problema donde un diagrama es útil, la ayuda adicional sería una nueva línea dibujada en el diagra-ma. En la mayor parte de los problemas algebraicos la ayuda podría ser una nueva incógnita que se relacione con la incógnita original.

- **Desglose el problema**

En algunas ocasiones podría dividir el problema en varias partes y elaborar un razonamiento distinto para cada parte. Por ejemplo, tenemos que usar a menudo esta estrategia al tratar con el valor absoluto.

- **Trabajar hacia atrás**

Es útil imaginar que su problema está resuelto y trabajar hacia atrás, paso por paso, hasta llegar a los datos originales. Entonces podría ser capaz de invertir los pasos y construir por lo tanto una solución para el problema original. Este procedimiento es muy común al resolver ecuaciones. Por ejemplo, al resolver la ecuación $3x - 5 = 7$, suponemos que x es un número que satisface a $3x - 5 = 7$ y trabajamos hacia atrás. Añadimos 5 a cada miembro de la ecuación y luego dividimos cada miembro entre 3 para obtener $x = 4$. Puesto que cada uno de estos pasos se puede invertir, ya resolvimos el problema.

- **Establecer metas secundarias**

Con frecuencia, en un problema complejo es útil establecer objetivos secundarios, en los cuales la situación deseada sólo se cumple en parte. Si usted logra o alcanza esta meta secundaria, entonces podría ser capaz de utilizarlas como base para alcanzar el objetivo final

- **Razonamiento indirecto**

Algunas veces es adecuado atacar un problema en forma indirecta. Al utilizar la **demostración por contradicción** para demostrar que P implica Q, suponemos que P es verdadera y que Q es falsa, y tratar de ver por qué no puede suceder. De alguna manera tenemos que usar esta información y llegar a una contradicción de lo que estamos absolutamente seguros de que es cierto.

- **Inducción matemática**

Al demostrar enunciados que contienen un entero positivo n, es frecuente que sea útil usar el Principio de la inducción matemática, la cual se estudia en la sección 11.5.

3. Poner en marcha el plan

En el paso 2, se diseñó un plan. Al ejecutarlo, debe verificar cada etapa del mismo y escribir los detalles que demuestran que la etapa es correcta.

4. Reflexione y revise

Al llegar a la solución, es prudente regresar y revisar, en parte para ver si hay errores y en parte para ver si hay una manera más sencilla de resolver el problema. Revisar lo hecho lo familiariza con el método de solución, lo cual podría ser útil para resolver un problema futuro. Descartes decía "Cada problema que he resuelto se convirtió en una regla que sirvió después para resolver otros problemas".

Ilustramos algunos de estos principios de resolución de problemas mediante un ejemplo. Otros ejemplos de estos principios se presentan al final de capítulos seleccionados.

Problema Velocidad promedio

Una automovilista sale de viaje. En la primera mitad de la distancia, ella viaja pausadamente a la velocidad de 30 millas/h; en la segunda mitad maneja a 60 millas/h. ¿Cuál es la velocidad promedio en su viaje?

▪ **Razonamiento para el problema**

Es tentador calcular el promedio de las velocidades y decir que la velocidad promedio de todo el viaje es

$$\frac{30 + 60}{2} = 45 \text{ millas/h}$$

¿Pero es este enfoque tan sencillo realmente correcto?

Intente con un caso especial

Veamos un caso especial que se calcula con facilidad. Supongamos que la distancia total recorrida es 120 millas. Puesto que las primeras 60 millas se recorren a 30 millas/h, el recorrido dura 2 h. Las segundas 60 millas se recorren a 60 millas/h, por lo que el recorrido dura una hora. Por lo tanto, el tiempo total es $2 + 1 = 3$ horas y la velocidad promedio es

$$\frac{120}{3} = 40 \text{ millas/h}$$

De modo que la suposición de 45 millas/h es errónea.

Entienda el problema

Solución Necesitamos considerar con más cuidado el significado de velocidad promedio. Se define como

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

Introduzca una notación

Sea d la distancia recorrida en cada mitad del viaje. Sean t_1 y t_2 los tiempos transcurridos en la primera y en la segunda mitad del viaje. Ya podemos escribir la información con la que contamos. Para la primera mitad del viaje, tenemos

Establezca lo que tiene

$$30 = \frac{d}{t_1} \tag{1}$$

y para la segunda mitad, tenemos

$$60 = \frac{d}{t_2} \tag{2}$$

Identifique la incógnita

A continuación identificamos la cantidad que nos piden determinar:

$$\text{velocidad promedio de todo el viaje} = \frac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}} = \frac{2d}{t_1 + t_2}$$

Conecte lo conocido con lo desconocido

Para calcular esta cantidad necesitamos conocer t_1 y t_2, de modo que resolvemos las ecuaciones 1 y 2 para estos tiempos:

$$t_1 = \frac{d}{30} \qquad t_2 = \frac{d}{60}$$

Ahora tenemos los ingredientes necesarios para calcular la cantidad deseada:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{2d}{t_1 + t_2} = \frac{2d}{\dfrac{d}{30} + \dfrac{d}{60}}$$

$$= \frac{60(2d)}{60\left(\dfrac{d}{30} + \dfrac{d}{60}\right)}$$

Multiplicación del numerador y del denominador por 60

$$= \frac{120d}{2d + d} = \frac{120d}{3d} = 40$$

Entonces, la velocidad promedio para todo el viaje es 40 millas por hora. ■

Problemas

1. **Distancia, tiempo y velocidad** Un hombre viaja en su automóvil desde su casa hasta el trabajo a una velocidad de 50 millas/h. El viaje de regreso desde su trabajo a casa lo efectúa más despacio, a sólo 30 millas/h. ¿Cuál es la velocidad promedio del hombre para el recorrido completo?

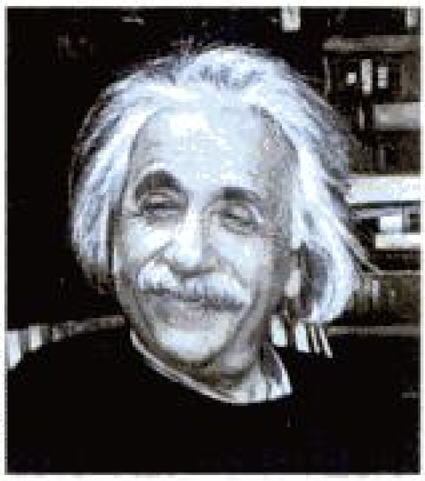
2. **[illegible]** Un viejo automóvil tiene que recorrer una ruta de 2 millas, colina arriba y colina abajo. Como es tan viejo, el vehículo puede subir la primera milla —el ascenso— no más rápido que a una velocidad promedio de 15 millas/h. ¿Qué tan rápido tiene que desplazarse el automóvil en la segunda milla —al descender, puede ir más rápido, naturalmente— para que llegue a una velocidad promedio de 30 millas/h en el viaje?

3. **Una mosca [illegible]** Un automóvil y un camión de mudanzas están estacionados a 120 millas uno de otro sobre una carretera recta. Cada uno de los conductores empieza a manejar en dirección al otro al mediodía, cada uno a una velocidad de 40 millas/h. Una mosca sale desde la defensa delantera del camión al mediodía y vuela hacia la defensa del automóvil, luego regresa de inmediato a la defensa del camión y de nuevo a la del automóvil, y así sucesivamente, hasta que se encuentran el automóvil y el camión de mudanzas. Si la mosca vuela a una velocidad de 100 millas/h, ¿cuál es la distancia total que recorre?

4. **[illegible]** ¿Qué precio es mejor para el comprador, uno de 40% o dos descuentos sucesivos de 20%?

5. **[illegible]** Un trozo de alambre está doblado como se ilustra en la figura. Puede ver que un corte a través del trozo de alambre produce cuatro trozos, y que dos cortes paralelos producen siete pedacitos. ¿Cuántos pedacitos se obtendrán por medio de 142 cortes paralelos? Escriba una fórmula para la cantidad de pedacitos que se obtienen con n cortes paralelos.

6. **Propagación de las amebas** Una ameba se propaga mediante simple división; cada división tarda 3 minutos en completarse. Cuado tal ameba se coloca dentro de un recipiente de vidrio con un líquido con nutrientes, el recipiente se llena de amebas en una hora. ¿Cuánto tardaría en llenarse el recipiente si empezamos no con una ameba, sino con dos?



Bettmann/Corbis

No se sienta mal si no resuelve correctamente estos problemas. Los problemas 2 y 6 fueron enviados a Albert Einstein por su amigo Wetheimer. Einstein y su amigo Bucky disfrutaban los problemas, y le contestaban a Wertheimer. He aquí una parte de la réplica:

> Su carta nos causó una gran diversión. La primera prueba de inteligencia nos engañó a Bucky y a mí. Sólo al trabajar en ella me di cuenta de que ¡no hay tiempo disponible para la carrera colina abajo! El segundo ejemplo también engañó al señor Bucky, pero a mí ya no. ¡Tales bromas nos mostraron cuán estúpidos somos!

(Véase *Mathematical Intelligencer*, primavera de 1990, pág. 41.)

7. Vuelta a un circuito Dos corredores empiezan a correr por un circuito al mismo tiempo, desde la misma posición de salida. George completa una vuelta en 50 s; Sue corre una vuelta en 30 s .¿Cuándo los corredores estarán corriendo lado a lado?

8. Promedios de bateo El jugador A tiene un promedio de bateo superior al del jugador B durante la primera mitad de la temporada de béisbol. El jugador A también tiene un promedio de bateo superior al del jugador B en la segunda mitad de la temporada. ¿Es necesariamente cierto que el jugador A tiene un promedio de bateo superior al del jugador B en toda la temporada?

9. Café con crema Se toma una cucharada de crema de un recipiente y se vierte en una taza de café. El café se derrama. Entonces se toma una cucharada de esta mezcla y se vierte dentro del recipiente de la crema. ¿Hay ahora más crema en la taza de café o más café en el recipiente de la crema?

10. Un cubo de hielo fundido Un cubo de hielo está flotando en un vaso con agua, lleno hasta el borde, como se muestra en la figura. ¿Qué sucede cuando el hielo se funde? ¿El vaso se derrama o el nivel de agua baja o permanece igual? (Necesita saber el Principio de Arquímedes: un objeto que flota desplaza un volumen de agua cuyo peso es igual al peso del objeto.)

11. Rodeando al mundo Un listón rojo se amarra fuertemente alrededor del Ecuador de la Tierra. ¿Cuánto listón necesita de más si sube el listón un pie por encima del Ecuador? (No necesita saber el radio de la Tierra para resolver este problema.)

12. Potencias irracionales Demuestre que es posible elevar un número irracional a una potencia irracional y obtener un resultado racional. [*Sugerencia:* el número $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional o irracional. Si a es racional, usted está acabado. Si a es irracional, considere $a^{\sqrt{2}}$.]

13. Raíces cuadradas babilonias Los antiguos babilonios idearon el siguiente proceso para determinar la raíz cuadrada de un número N. Primero hacían una suposición de la raíz cuadrada, llamémosla primera suposición r_1. Al observar que

$$r_1 \cdot \left(\frac{N}{r_1}\right) = N$$

concluyeron que la raíz cuadrada real debe estar en algún lugar entre r_1 y N/r_1, de modo que su siguiente suposición para la raíz cuadrada, r_2, era el promedio de estos dos números:

$$r_2 = \frac{1}{2}\left(r_1 + \frac{N}{r_1}\right)$$

Al continuar de esta manera, la siguiente aproximación era

$$r_3 = \frac{1}{2}\left(r_2 + \frac{N}{r_2}\right)$$

y así sucesivamente. En general, una vez que hemos hecho la n-ésima aproximación de la raíz cuadrada de N, encontramos la $(n + 1)$-ésima usando

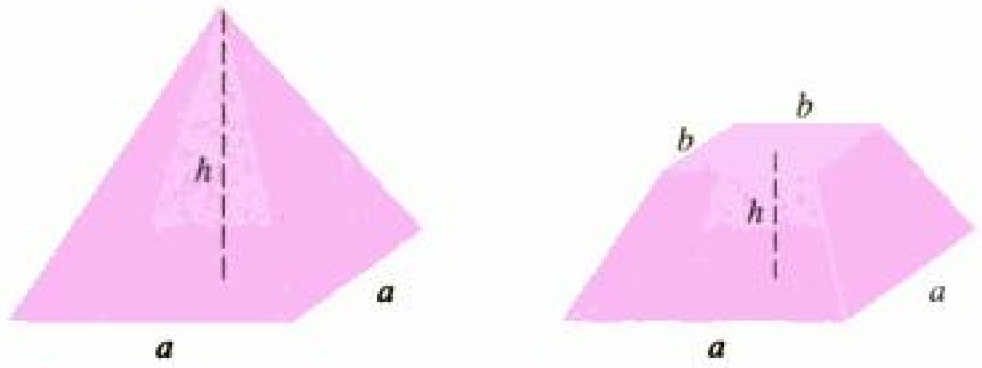
$$r_{n+1} = \frac{1}{2}\left(r_n + \frac{N}{r_n}\right)$$

Aplique este procedimiento para encontrar $\sqrt{72}$, con dos cifras decimales.

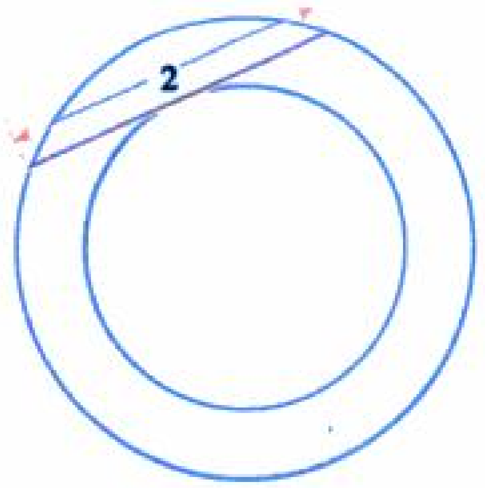
14. **Un cubo perfecto** Demuestre que si multiplica tres enteros consecutivos y luego suma el entero de en medio al resultado, obtiene un cubo perfecto.
15. **Patrones numéricos** Encuentre el último dígito del número 3^{459}. [*Sugerencia:* calcule las primeras potencias de 3 y busque un patrón.]
16. **Patrones numéricos** Aplique las técnicas de resolución de un problema más sencillo y busque un patrón para evaluar el número

$$3999999999999^2$$

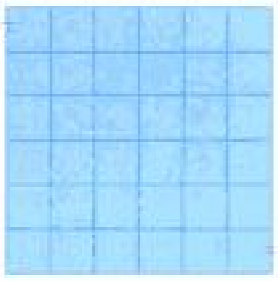
17. **Triángulos rectángulos y primos** Demuestre que todo número primo es un cateto de exactamente un triángulo rectángulo con lados enteros. (Este problema lo planteó primero Fermat; véase pág. 652.)
18. **Una ecuación sin solución** Demuestre que la ecuación $x^2 + y^2 = 4z + 3$ no tiene solución en los enteros. [*Sugerencia:* recuerde que un número par es de la forma $2n$ y un impar es de la forma $2n + 1$. Considere todos los casos posibles de x y de y par o impar.]
19. **Terminar donde empezó** Una mujer parte del punto P en la superficie de la Tierra, y camina 1 milla al Sur, luego 1 milla al Este, luego 1 milla al Norte y encuentra que regresó al punto P, el punto donde empezó. Describa todos los puntos P para los cuales esto es posible (hay una cantidad infinita).
20. **Volumen de una pirámide truncada** Los antiguos egipcios, como resultado de la construcción de sus pirámides, sabían que el volumen de una pirámide de altura h y base cuadrada de lado a es $V = \frac{1}{3}ha^2$. Fueron capaces de aplicar este hecho para demostrar que el volumen de una pirámide truncada es $V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$, donde h es la altura y b y a son las longitudes de los lados de la parte cuadrada superior y de la base, como se muestra en la figura. Demuestre la fórmula del volumen de la pirámide truncada.



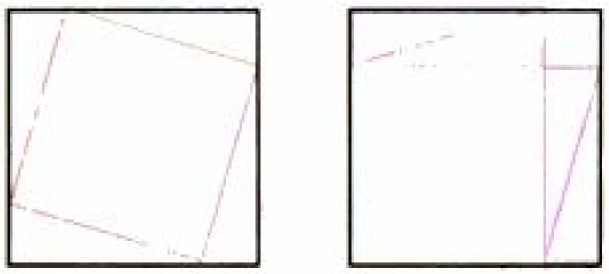
21. **Área de un anillo** Determine el área de la región entre los dos cículos concéntricos mostrados en la figura.



Bhaskara (nació en 1114) fue un matemático, astrónomo y astrólogo hindú. Entre sus muchos logros está una ingeniosa demostración del teorema de Pitágoras (véase el problema 22). Su importante libro de matemática, *Lilavati* [*Lo hermoso*] consiste en problemas de álgebra planteados en la forma de historias para su hija Lilavati. Muchos de los problemas empiezan con "¡Oh hermosa doncella!, imagina ..." Se dice que, usando la astrología, Bhaskara determinó la gran desgracia que sobrevendría a su hija si ésta se casaba en otro momento que no fuera una cierta hora y un cierto día. El día de la boda, mientras ella observaba con gran expectación el reloj de agua, cayó una perla de su tocado sin que ella se percatara. Esto detuvo el flujo de agua del reloj, lo que ocasionó que se pasara el momento oportuno para la boda. Bhaskara escribió la obra *Lilavati* para consolarla.



22. Demostración de Bhaskara El matemático hindú Bhaskara dibujó las dos figuras que se ilustran aquí y escribió abajo de ellas: "¡He aquí!" Explique cómo estos dibujos demuestran el teorema de Pitágoras.



23. Un entero interesante El número 1729 es el entero positivo más pequeño que puede ser representado en dos maneras distintas como la suma de dos cubos. ¿Cuáles son estas maneras?

24. Números simples

a) Utilice una calculadora para determinar el valor de la expresión

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

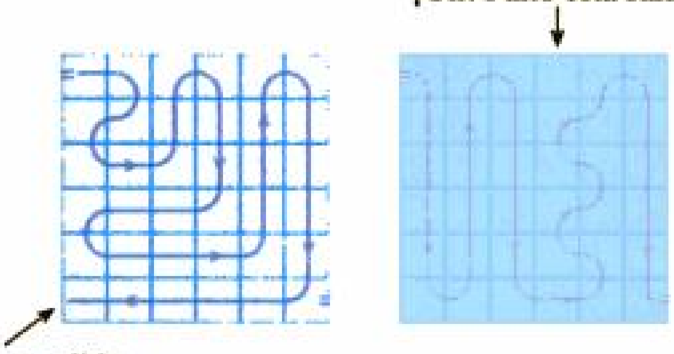
El número parece muy sencillo. Demuestre que el valor calculado es correcto.

b) Mediante una calculadora evalúe

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

Demuestre que el valor calculado es correcto.

25. Recorrido por el museo imposible Un museo tiene la forma de un cuadrado con seis salas a un lado; la entrada y la salida están en esquinas opuestas, como se muestra en la figura de la izquierda. Cada par de salas adyacentes está unido por una puerta. A algunos turistas muy eficientes les gustaría recorrer el museo visitando cada sala *exactamente* una vez. ¿Puede encontrar una trayectoria para tal recorrido? Aquí hay ejemplos de intentos que fallaron.



Aquí está cómo puede demostrar que el recorrido por el museo es imposible. Imagine que las salas están coloreadas en blanco y negro como en un tablero de ajedrez.

a) Muestre que los colores de las salas se alternan entre blanco y negro a medida que el turista camina por el museo.

b) Utilice el inciso a) y el hecho de que hay un número par de salas en el museo para concluir que el recorrido no puede terminar en la salida.

26. Coloración del plano coordenado Suponga que cada punto en el plano coordenado está pintado de rojo o de azul. Demuestre que es necesario que haya siempre dos puntos del mismo color que están separados exactamente una unidad.

27. Bosque coordenado racional Suponga que cada punto (x, y) en el plano, cuyas coordenadas son números racionales, representan un árbol. Si usted está de pie en el punto $(0, 0)$, ¿qué tan lejos podría ver en este bosque?

28. Mil puntos Se grafican mil puntos en el plano coordenado. Explique por qué es posible dibujar una recta en el plano de modo que la mitad de los puntos están en un lado de la recta y la otra mitad en el otro lado. [*Sugerencia:* considere las pendientes de las rectas determinadas por cada *par* de puntos.]

29. Gráfica de una región en el plano Trace la región en el plano que consiste en todos los puntos (x, y) tales que

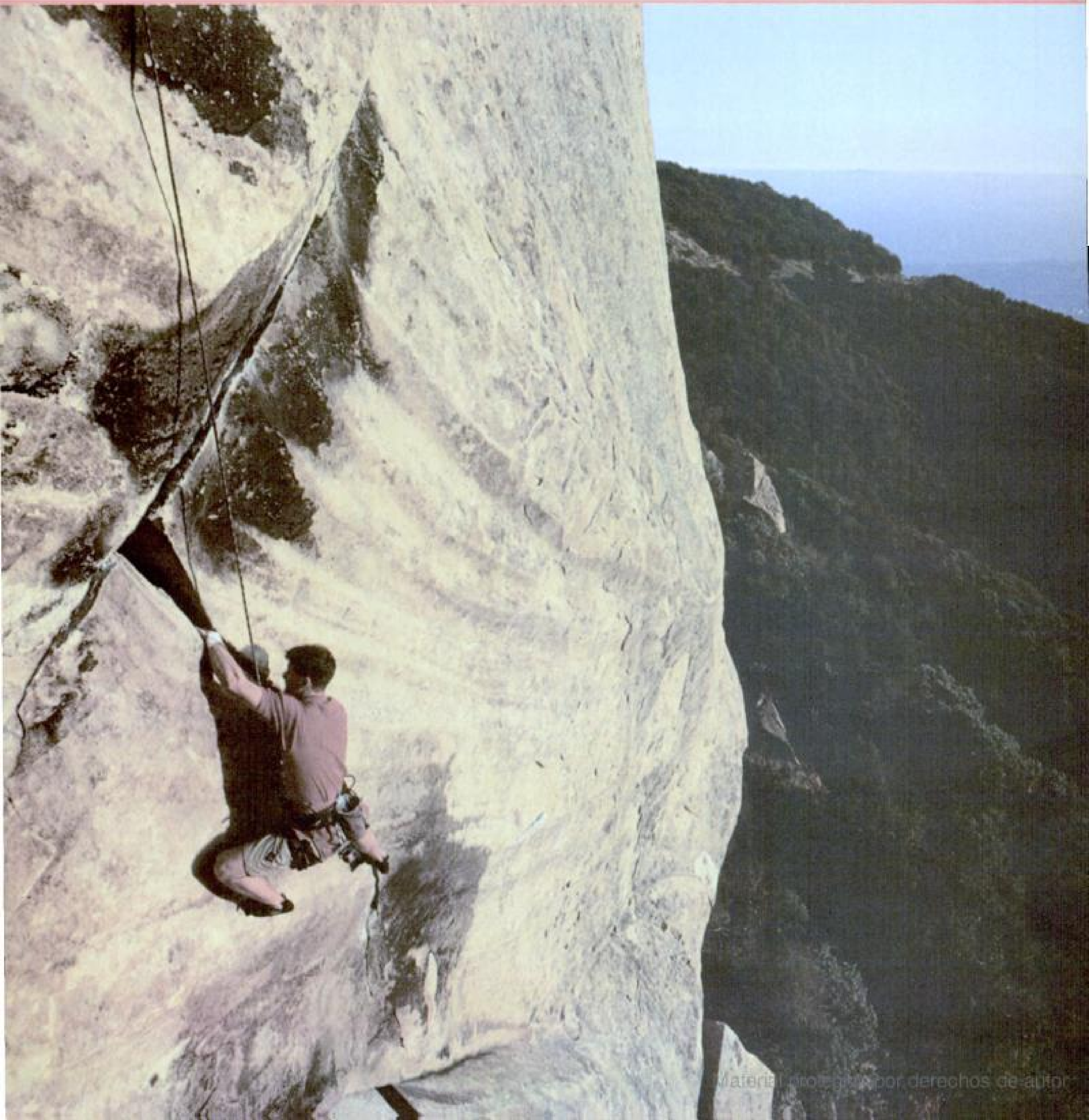
$$|x| + |y| \leq 1$$

30. Gráfica de una ecuación Grafique la ecuación

$$x^2y - y^3 - 5x^2 + 5y^2 = 0$$

[*Sugerencia:* factorice.]

2 Funciones

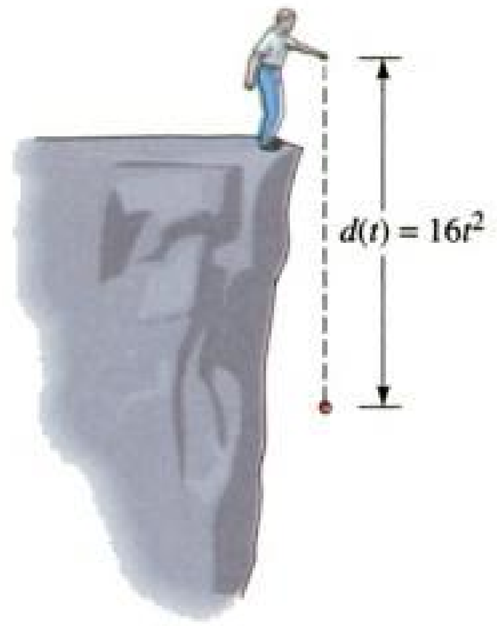


Esquema del capítulo

Quizá la idea matemática más útil para modelar el mundo real es el concepto de *función*, que se estudia en este capítulo. Para entender qué es una función, veremos un ejemplo.

Si un escalador de rocas deja caer una piedra desde un acantilado alto, ¿qué sucede con la piedra? Por supuesto la piedra cae; qué tanto ha caído en determinado momento depende del tiempo que ha estado descendiendo. Ésta es una descripción general, pero no indica de manera exacta cuándo la piedra choca con el suelo.

Descripción general: la piedra cae.



Función: en t segundos la piedra cae $16t^2$ pies.

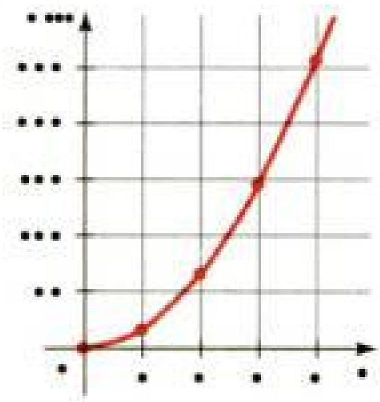
Lo que necesitamos es una *regla* que relacione la posición de la piedra con el tiempo que ésta ha descendido. Los físicos saben que la regla es: en t segundos la piedra cae $16t^2$ pies. Si $d(t)$ representa la distancia que ha descendido la piedra en el instante t, entonces esta regla se puede expresar como

$$d(t) = 16t^2$$

Esta "regla" para hallar la distancia en términos del tiempo se llama *función*. Se dice que la distancia es una *función* del tiempo. Para entender mejor esta regla o función, se puede construir una tabla de valores o dibujar una gráfica. La gráfica permite ver con facilidad qué tan lejos y qué tan rápido cae la piedra.

Galen Rowell/Corbis

Tiempo t	Distancia $d(t)$
0	0
1	16
2	64
3	144
4	256



Usted puede observar por qué son importantes las funciones. Por ejemplo, si un físico encuentra la "regla" o función que relaciona la distancia recorrida con el tiempo transcurrido, entonces puede predecir cuándo un misil chocará con el suelo. Si un biólogo halla la función o "regla" que relaciona el número de bacterias en un cultivo con el tiempo, entonces puede predecir el número de bacterias para algún tiempo futuro. Si un agricultor conoce la función o "regla" que relaciona la producción de manzanas con la cantidad de árboles por acre, entonces puede decidir cuántos árboles plantar por acre para maximizar la producción.

En este capítulo aprenderemos cómo se emplean las funciones para modelar situaciones del mundo real y cómo hallar esta clase de funciones.

2.1 ¿Qué es una función?

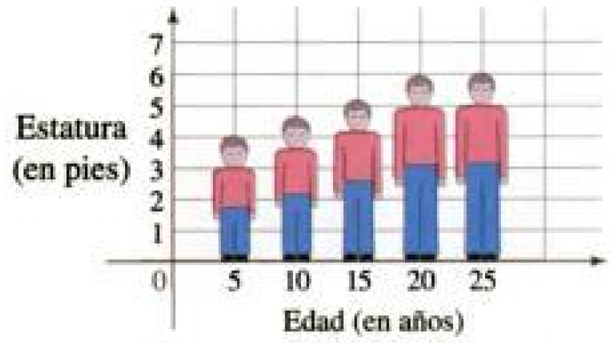
En esta sección se explora la idea de función y después se da su definición matemática.

Funciones en nuestro entorno

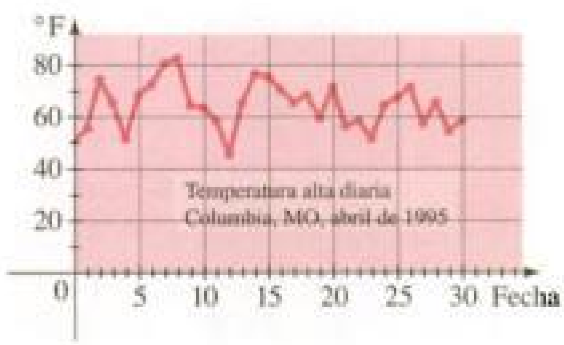
En casi todo fenómeno físico se observa que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, la estatura depende de la edad, la temperatura depende de la fecha, el costo de enviar por correo un paquete depende de su peso (véase figura 1). Se usa el término *función* para describir esta dependencia de una cantidad sobre otra. Es decir, se expresa lo siguiente:

- La altura es una función de la edad.
- La temperatura es una función de la fecha.
- El costo de enviar por correo un paquete es una función del peso.

La Oficina Postal de Estados Unidos emplea una regla simple para determinar el costo de enviar un paquete con base en su peso. Pero no es fácil describir la regla que relaciona el peso con la edad o la temperatura con la fecha.



La estatura es una función de la edad.



La temperatura es una función de la fecha.

w (onzas)	Franqueo (dólares)
$0 < w$ 1	0.37
$1 < w$ 2	0.60
$2 < w$ 3	0.83
$3 < w$ 4	1.06
$4 < w$ 5	1.29
$5 < w$ 6	1.52

El franqueo es una función del peso.

Figura 1

¿Puede pensar en otras funciones? Aquí hay algunos ejemplos:

- El área de un círculo es una función de su radio.
- El número de bacterias en un cultivo es una función del tiempo.
- El peso de un astronauta es una función de su elevación.
- El precio de un artículo es una función de la demanda de ese artículo.

La regla que describe cómo el área A de un círculo depende de su radio r está dada por la fórmula $A = \pi r^2$. Incluso cuando no está disponible una regla o fórmula precisa que describe una función, se puede todavía describir la función mediante una gráfica. Por ejemplo, cuando se abre la llave del agua caliente, la temperatura del agua depende del tiempo que el agua haya estado corriendo. Así, se puede decir

- La temperatura del agua de la llave es una función del tiempo.

En la figura 2 se muestra una gráfica aproximada de la temperatura T del agua como una función del tiempo t que ha trascurrido desde que se abrió la llave. En la gráfica se muestra que la temperatura inicial del agua es cercana a la temperatura ambiente. Cuando el agua del depósito de agua caliente llega a la llave, la temperatura T del agua se incrementa con rapidez. En la fase siguiente, T es constante a la temperatura del agua en el depósito. Cuando se vacía el depósito, T disminuye a la temperatura del suministro de agua fría.

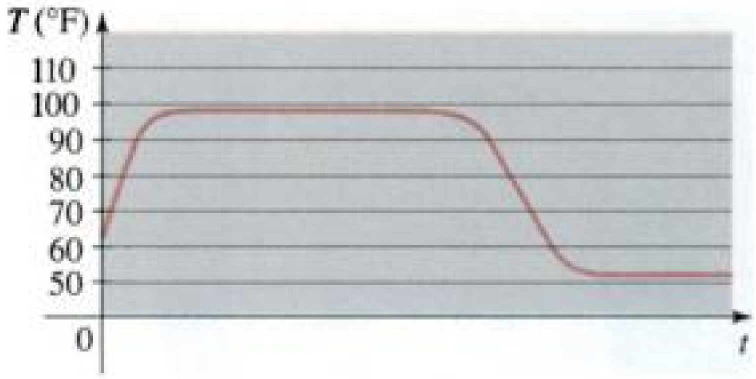


Figura 2
Gráfica de la temperatura T del agua como una función del tiempo t

Definición de función

Antes se emplearon letras para representar números. Aquí se hace algo muy diferente. Se emplean letras para representar *reglas*.

Una función es una regla. Para hablar acerca de una función, se requiere asignarle un nombre. Se emplearán letras como $f, g, h, \ldots$ para representar funciones. Por ejemplo, se puede usar la letra f para representar una regla como sigue:

"f" es la regla "cuadrado del número"

Cuando se escribe $f(2)$, se entiende "aplicar la regla f al número 2". Al aplicar la regla se obtiene $f(2) = 2^2 = 4$. De manera similar, $f(3) = 3^2 = 9$, $f(4) = 4^2 = 16$, y en general $f(x) = x^2$.

Definición de función

Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x en un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, en un conjunto B.

Por lo general, se consideran funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales. El símbolo $f(x)$ se lee "f de x" o "f en x" y se llama el **valor de f en x**, o la **imagen de x bajo f**. El conjunto A se llama **dominio** de la función. El **rango** de f es el conjunto de los valores posibles de $f(x)$ cuando x varía a través de el dominio, es decir,

$$\text{rango de } f = \{f(x) \mid x \in A\}$$

El símbolo que representa un número arbitrario en el dominio de una función f se llama **variable independiente**. El símbolo que representa un número en el rango de f se llama **variable dependiente**. Así, si se escribe $y = f(x)$, entonces x es la variable independiente y y es la variable dependiente.

La tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ en la calculadora es un buen ejemplo de considerar una función como una máquina. Primero se introduce x en la pantalla. Luego, se oprime la tecla marcada como $\boxed{\sqrt{\ }}$. (En la mayor parte de las calculadoras de *graficación*, el orden de estas operaciones es a la inversa.) Si $x < 0$, entonces x no está en el dominio de esta función; es decir, x no es una entrada aceptable y la calculadora indicará un error. Si $x \geq 0$, entonces aparece en la pantalla una aproximación a $\sqrt{x}$ correcta hasta cierto número de lugares decimales. (Por lo tanto, la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ en la calculadora no es lo mismo que la función matemática exacta f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.)

Es útil considerar una función como una **máquina** (véase figura 3). Si x está en el dominio de la función f, entonces cuando se introduce x en la máquina, es aceptada como una **entrada** y la máquina produce una **salida** $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. Así, se puede considerar al dominio como el conjunto de las entradas posibles y al rango como el conjunto de las salidas posibles.

Figura 3
Diagrama de máquina de f

Otra forma de ilustrar una función es mediante un **diagrama de flechas** como en la figura 4. Cada flecha conecta un elemento de A con un elemento de B. La flecha indica que $f(x)$ se relaciona con x, $f(a)$ se relaciona con a, etcétera.

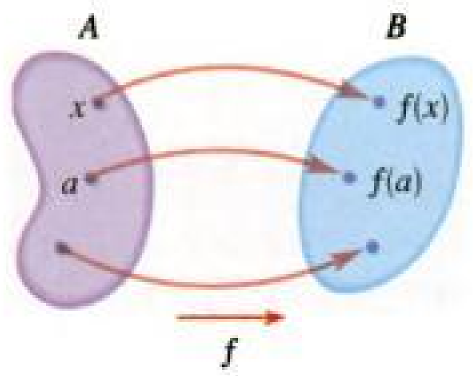


Figura 4
Diagrama de flechas de f

Ejemplo 1 La función cuadrática

La función cuadrática asigna a cada número real x su cuadrado x^2. Se define por

$$f(x) = x^2$$

a) Evaluar $f(3)$, $f(-2)$ y $f(\sqrt{5})$.

b) Hallar el dominio y el rango de f.

c) Trazar el diagrama de máquina para f.

Solución

a) Los valores de f se hallan al sustituir x en $f(x) = x^2$.

$$f(3) = 3^2 = 9 \qquad f(-2) = (-2)^2 = 4 \qquad f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 = 5$$

b) El dominio de f es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales. El rango de f consiste en los valores de $f(x)$, es decir, los números de la forma x^2. Puesto que $x^2 \geq 0$ para todos los números reales x, se puede ver que el rango de f es $\{y \mid y \geq 0\} = [0, \infty)$.

c) En la figura 5 se muestra un diagrama de máquina para esta función. ■

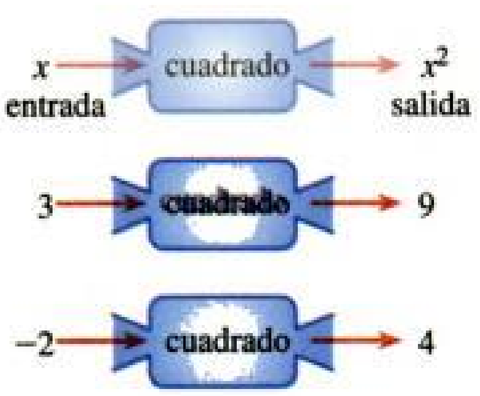


Figura 5
Diagrama de máquina

Evaluación de una función

En la definición de una función la variable independiente x desempeña el papel de "marcador de posición". Por ejemplo, la función $f(x) = 3x^2 + x - 5$ se puede considerar como

$$f(\quad) = 3 \cdot \quad^2 + \quad - 5$$

Para evaluar f en un número, se sustituye el número para el marcador de posición.

Ejemplo 2 Evaluación de una función

Sea $f(x) = 3x^2 + x - 5$. Evalúe cada valor de función.

a) $f(-2)$ b) $f(0)$ c) $f(4)$ d) $f(\frac{1}{2})$

Solución Para evaluar f en un número, se sustituye x por el número en la definición de f.

a) $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5 = 5$

b) $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 0 - 5 = -5$

c) $f(4) = 3 \cdot 4^2 + 4 - 5 = 47$

d) $f(\frac{1}{2}) = 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - 5 = -\frac{15}{4}$ ■

Ejemplo 3 Una función definida por partes

Un teléfono celular cuesta \$39 al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cada minuto adicional de uso cuesta 20¢. El costo mensual es una función de la cantidad de minutos empleados, y se expresa como

$$C(x) = \begin{cases} 39 & \text{si } 0 \le x \le 400 \\ 39 + 0.2(x - 400) & \text{si } x > 400 \end{cases}$$

Determine $C(100)$, $C(400)$ y $C(480)$.

Solución Recuerde que una función es una regla. A continuación se explica cómo aplicar la regla para esta función. Primero, se considera el valor de la entrada x. Si $0 \le x \le 400$, entonces el valor de $C(x)$ es 39. Por otro lado, si $x > 400$, entonces el valor de $C(x)$ es $39 + 0.2(x - 400)$.

Una función por partes se define mediante fórmulas distintas en partes diferentes de su dominio. La función C del ejemplo 3 es definida por partes.

Puesto que $100 \le 400$, se tiene $C(100) = 39$

Puesto que $400 \le 400$, se tiene $C(400) = 39$

Puesto que $480 > 400$, se tiene $C(480) = 39 + 0.2(480 - 400) = 55$.

Por lo tanto, el plan carga \$39 por 100 minutos, \$39 por 400 minutos y \$55 por 480 minutos. ■

Ejemplo 4 Evaluar una función

Expresiones como la del inciso d) del ejemplo 4 se presentan con frecuencia en cálculo; se llaman *cocientes de diferencias*, y representan el cambio promedio en el valor de f entre $x = a$ y $x = a + h$.

Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, evalúe lo siguiente.

a) $f(a)$ b) $f(-a)$

c) $f(a + h)$ d) $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$, $h \neq 0$

Solución

a) $f(a) = 2a^2 + 3a - 1$

b) $f(-a) = 2(-a)^2 + 3(-a) - 1 = 2a^2 - 3a - 1$

c) $f(a + h) = 2(a + h)^2 + 3(a + h) - 1$

$$= 2(a^2 + 2ah + h^2) + 3(a + h) - 1$$

$$= 2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1$$

d) Con los resultados de los incisos c) y a), se tiene

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1) - (2a^2 + 3a - 1)}{h}$$

$$= \frac{4ah + 2h^2 + 3h}{h} = 4a + 2h + 3$$

■

El peso de un objeto sobre o cerca de la Tierra es la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre él. Cuando está en órbita alrededor de la Tierra, un astronauta experimenta la sensación de "ingravidez" porque la fuerza centrípeta que lo mantiene en órbita es exactamente la misma que la atracción gravitacional de la Tierra.

Ejemplo 5 Peso de un astronauta

Si un astronauta pesa 130 libras en la superficie de la Tierra, entonces su peso cuando está h millas arriba de la Tierra se expresa mediante la función

$$w(h) = 130\left(\frac{3960}{3960 + h}\right)^2$$

a) ¿Cuál es su peso cuando está 100 millas sobre la Tierra?

b) Construya una tabla de valores para función w que dé el peso a alturas de 0 a 500 millas. ¿Qué concluye de la tabla?

Solución

a) Se desea el valor de la función w cuando $h = 100$; es decir, se debe calcular $w(100)$.

$$w(100) = 130\left(\frac{3960}{3960 + 100}\right)^2 \approx 123.67$$

Por lo tanto, a una altura de 100 millas, pesa 124 lb.

b) La tabla proporciona el peso del astronauta, redondeado a la libra más cercana, en incrementos de 100 millas. Los valores de la tabla se calculan como en el inciso a).

h	$w(h)$
0	130
100	124
200	118
300	112
400	107
500	102

La tabla indica que mientras más alto vaya el astronauta pesa menos. ■

Dominio de una función

Recuerde que el *dominio* de una función es el conjunto de las entradas para la función. El dominio de una función se puede expresar de forma explícita. Por ejemplo, si se escribe

$$f(x) = x^2, \qquad 0 \le x \le 5$$

entonces el dominio es el conjunto de los números reales para los cuales $0 \le x \le 5$. Si la función está dada por una expresión algebraica y el dominio no se enuncia de manera explícita, entonces por convención *el dominio de la función es el dominio de la expresión algebraica —es decir, el conjunto de los números reales para los que la expresión se define como un número real*. Por ejemplo, considere las funciones

Los dominios de las expresiones algebraicas se describen en la página 35.

$$f(x) = \frac{1}{x-4} \qquad\qquad g(x) = \sqrt{x}$$

La función f no está definida en $x = 4$, así que su dominio es $\{x \mid x \neq 4\}$. La función g no está definida para x negativa, así que su dominio es $\{x \mid x \neq 0\}$.

Ejemplo 6 Determinación de dominios de funciones

Halle el dominio de cada función..

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ b) $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ c) $h(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t+1}}$

Solución

a) La función no está definida cuando el denominador es 0. Puesto que

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

se puede observar que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Así, el dominio de f es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

El dominio se puede escribir en notación de intervalo como

$$(\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

b) No se puede sacar la raíz cuadrada de una cantidad negativa, así que se debe tener $9 - x^2 \ge 0$. Con los métodos de la sección 1.7, se puede resolver esta desigualdad para hallar que $-3 \le x \le 3$. Así, el dominio de g es

$$\{x \mid -3 \le x \le 3\} = [-3, 3]$$

c) No se puede sacar la raíz cuadrada de un número negativo, y tampoco se puede dividir entre cero, así que se debe tener $t + 1 > 0$, es decir, $t > -1$. Por lo tanto, el dominio de h es

$$\{t \mid t > -1\} = (-1, \infty)$$

■

Cuatro formas de representar una función

Para ayudar a entender lo que es una función, se han empleado diagramas de máquina y flechas. Se puede describir una función específica en las cuatro formas siguientes:

- verbal (mediante una descripción en palabras)
- algebraica (mediante una fórmula explícita)

- visual (por medio de una gráfica)
- numérica (por medio de una tabla de valores)

Una función simple se puede representar por las cuatro formas, y suele ser útil ir de una representación a otra para comprender mejor la función. Sin embargo, ciertas funciones se describen de manera más natural con un método que con otros. Un ejemplo de una descripción verbal es

$P(t)$ es "la población del mundo en el momento t"

La función P se puede describir también de forma numérica si se da una tabla de valores (véase la tabla 1 en la página 386). Una representación útil del área de un círculo como una función de su radio es la fórmula algebraica

$$A(r) = \pi r^2$$

La gráfica producida mediante un sismógrafo (véase el cuadro) es una representación visual de la función de aceleración vertical $a(t)$ del suelo durante un terremoto. Como un ejemplo final, considere la función $C(w)$, que se describe de forma verbal como "el costo de enviar por correo una carta de primera clase con peso w". La forma más conveniente de describir esta función es numéricamente; es decir, con una tabla de valores.

En este libro se emplearán las cuatro representaciones de funciones. Se resumen en el siguiente cuadro.

Cuatro formas de representar una función

Verbal

Con palabras:

$P(t)$ es la "población del mundo en el instante t"

Relación de la población P y el tiempo t

Algebraica

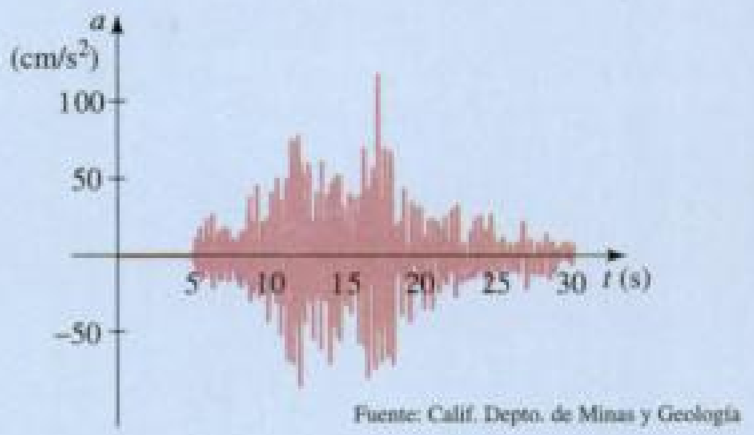
Por medio de una fórmula:

$$A(r) = \pi r^2$$

Área de un círculo

Visual

Por medio de una gráfica:



Aceleración vertical durante un terremoto

Numérica

Por medio de una tabla de valores:

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \le 1$	0.37
$1 < w \le 2$	0.60
$2 < w \le 3$	0.83
$3 < w \le 4$	1.06
$4 < w \le 5$	1.29
⋮	⋮

Costo de enviar una carta por correo de primera clase

2.1 Ejercicios

1–4 ■ Exprese la regla en notación de función. (Por ejemplo, la regla "eleve al cuadrado, luego reste 5" se expresa como la función $f(x) = x^2 - 5$.)

1. Sume 5, luego multiplique por 2

2. Divida entre 7, después reste 4

3. Reste 5, luego eleve al cuadrado

4. Saque la raíz cuadrada, sume 8, luego multiplique por $\frac{1}{3}$

5–8 ■ Exprese la función (o regla) en palabras.

5. $f(x) = \dfrac{x-4}{3}$

6. $g(x) = \dfrac{x}{3} - 4$

7. $h(x) = x^2 + 2$

8. $k(x) = \sqrt{x+2}$

9–10 ■ Trace un diagrama de máquina para la función.

9. $f(x) = \sqrt{x-1}$

10. $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$

11–12 ■ Complete la tabla.

11. $f(x) = 2(x-1)^2$

x	$f(x)$
-1	
0	
1	
2	
3	

12. $g(x) = \lvert 2x + 3 \rvert$

x	$g(x)$
-3	
-2	
0	
1	
3	

13–20 ■ Evalúe la función en los valores indicados.

13. $f(x) = 2x + 1$;
$f(1), f(-2), f(\frac{1}{2}), f(a), f(-a), f(a+b)$

14. $f(x) = x^2 + 2x$;
$f(0), f(3), f(-3), f(a), f(-x), f\left(\dfrac{1}{a}\right)$

15. $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$;
$g(2), g(-2), g(\frac{1}{2}), g(a), g(a-1), g(-1)$

16. $h(t) = t + \dfrac{1}{t}$;
$h(1), h(-1), h(2), h(\frac{1}{2}), h(x), h\left(\dfrac{1}{x}\right)$

17. $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$;
$f(0), f(2), f(-2), f(\sqrt{2}), f(x+1), f(-x)$

18. $f(x) = x^3 - 4x^2$;
$f(0), f(1), f(-1), f(\frac{3}{2}), f\left(\dfrac{x}{2}\right), f(x^2)$

19. $f(x) = 2\lvert x - 1 \rvert$;
$f(-2), f(0), f(\frac{1}{2}), f(2), f(x+1), f(x^2+2)$

20. $f(x) = \dfrac{\lvert x \rvert}{x}$;
$f(-2), f(-1), f(0), f(5), f(x^2), f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

21–24 ■ Evalúe la función definida por partes en los valores indicados.

21. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
$f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$

22. $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
$f(-3), f(0), f(2), f(3), f(5)$

23. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
$f(-4), f(-\frac{3}{2}), f(-1), f(0), f(25)$

24. $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
$f(-5), f(0), f(1), f(2), f(5)$

25–28 ■ Use la función para evaluar las expresiones indicadas y simplifique.

25. $f(x) = x^2 + 1$; $f(x+2), f(x) + f(2)$

26. $f(x) = 3x - 1$; $f(2x), 2f(x)$

27. $f(x) = x + 4$; $f(x^2), (f(x))^2$

28. $f(x) = 6x - 18$; $f\left(\dfrac{x}{3}\right), \dfrac{f(x)}{3}$

29–36 ■ Halle $f(a)$, $f(a+h)$, y el cociente de diferencias $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, donde $h \neq 0$.

29. $f(x) = 3x + 2$

30. $f(x) = x^2 + 1$

31. $f(x) = 5$

32. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

33. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

34. $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

35. $f(x) = 3 - 5x + 4x^2$

36. $f(x) = x^3$

37–58 ■ Encuentre el dominio de la función.

37. $f(x) = 2x$

38. $f(x) = x^2 + 1$

39. $f(x) = 2x, \quad -1 \le x \le 5$

40. $f(x) = x^2 + 1, \quad 0 \le x \le 5$

41. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

42. $f(x) = \dfrac{1}{3x-6}$

43. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$

44. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+x-6}$

45. $f(x) = \sqrt{x-5}$

46. $f(x) = \sqrt[4]{x+9}$

47. $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$

48. $g(x) = \sqrt{7-3x}$

49. $h(x) = \sqrt{2x-5}$

50. $G(x) = \sqrt{x^2-9}$

51. $g(x) = \dfrac{\sqrt{2+x}}{3-x}$

52. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x^2+x-1}$

53. $g(x) = \sqrt[4]{x^2-6x}$

54. $g(x) = \sqrt{x^2-2x-8}$

55. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-4}}$

56. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{6-x}}$

57. $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{2x-1}}$

58. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{9-x^2}}$

Aplicaciones

59. **Costo de producción** El costo C en dólares de producir x yardas de cierta tela se expresa mediante la función

$$C(x) = 1500 + 3x + 0.02x^2 + 0.0001x^3$$

a) Halle $C(10)$ y $C(100)$.

b) ¿Qué representan sus respuestas del inciso a)?

c) Encuentre $C(0)$. (Este número representa los *costos fijos.)*

60. **Área de una esfera** El área de superficie S de una esfera es una función de su radio r dada por

$$S(r) = 4\pi r^2$$

a) Determine $S(2)$ y $S(3)$.

b) ¿Qué representan sus respuestas del inciso a)?

61. **¿Qué tan lejos puede ver?** Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia máxima D que una persona puede ver desde la parte alta de un edificio alto o desde un avión a la altura h está dada por la función

$$D(h) = \sqrt{2rh + h^2}$$

donde $r = 3960$ millas es el radio de la Tierra y D y h se miden en millas.

a) Determine $D(0.1)$ y $D(0.2)$.

b) ¿Qué tan lejos puede ver desde la terraza de la torre CN de Toronto, situada a 1135 pies desde el nivel del suelo?

c) La aviación comercial vuela a una altitud de cerca de 7 millas. ¿Qué tan lejos puede ver el piloto?

62. **Ley de Torricelli** Un depósito contiene 50 galones de agua, que drenan desde un orificio en el fondo, lo cual causa que el depósito se vacíe en 20 minutos. El depósito drena más rápido cuando está casi lleno porque la presión del orificio es mayor. La **ley de Torricelli** da el volumen de agua que permanece en el depósito después de t minutos como

$$V(t) = 50\left(1 - \frac{t}{20}\right)^2 \qquad 0 \le t \le 20$$

a) Determine $V(0)$ y $V(20)$.

b) ¿Qué representan sus respuestas del inciso a)?

c) Elabore una tabla de valores de $V(t)$ para $t = 0, 5, 10, 15, 20$.

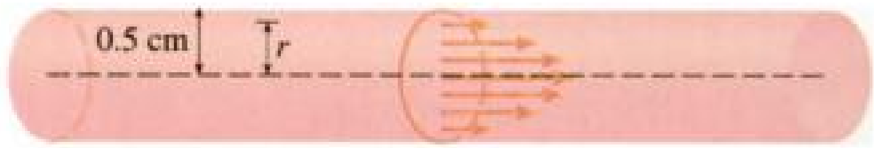
63. **Flujo de sangre** Cuando la sangre se mueve por una vena o arteria, su velocidad v es mayor a lo largo del eje central y disminuye a medida que se incrementa la distancia r desde el eje central (véase la figura). La fórmula que da v como una función de r se llama **ley de flujo laminar.** Para una arteria con radio 0.5 cm, se tiene

$$v(r) = 18\,500(0.25 - r^2) \qquad 0 \le r \le 0.5$$

a) Determine $v(0.1)$ y $v(0.4)$.

b) ¿Qué indican las respuestas del inciso a) acerca del flujo de sangre en esta arteria?

c) Construya una tabla de valores de $v(r)$ para $r = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.



64. Tamaño de la pupila Cuando se incrementa la brillantez x de una fuente de luz, el ojo reacciona disminuyendo el radio R de la pupila. La dependencia de R en x está dada por la función

$$R(x) = \sqrt{\frac{13 + 7x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}}$$

a) Encuentre $R(1)$, $R(10)$ y $R(100)$.

b) Elabore una tabla de valores de $R(x)$.

65. Relatividad De acuerdo con la teoría de la relatividad, la longitud L de un objeto es una función de su velocidad v con respecto a un observador. Para un objeto cuya longitud en reposo es 10 m, la función está dada por

$$L(v) = 10\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

donde c es la velocidad de la luz.

a) Determine $L(0.5c)$, $L(0.75c)$ y $L(0.9c)$.

b) ¿Cómo cambia la longitud de un objeto cuando se incrementa su velocidad?

66. Impuesto sobre la renta En cierto país, el impuesto sobre la renta T se evalúa de acuerdo con la siguiente función de ingreso x:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le 10\,000 \\ 0.08x & \text{si } 10\,000 < x \le 20\,000 \\ 1600 + 0.15x & \text{si } 20\,000 < x \end{cases}$$

a) Encuentre $T(5\,000)$, $T(12\,000)$ y $T(25\,000)$.

b) ¿Qué representan las respuestas al inciso a)?

67. Compras por Internet Una librería por Internet cobra \$15 por envío para pedidos menores a \$100, pero el envío es gratis para pedidos de \$100 o más. El costo C de un pedido es una función del precio total x de los libros comprados, dada por

$$C(x) = \begin{cases} x + 15 & \text{si } x < 100 \\ x & \text{si } x \ge 100 \end{cases}$$

(a) Encuentre $C(75)$, $C(90)$, $C(100)$ y $C(105)$.

(b) ¿Qué representan las respuestas al inciso a)?

68. Costo de estancia en un hotel Una cadena de hoteles cobra \$75 por noche para las dos primeras noches y \$50 por cada noche adicional. El costo total T es una función del número de noches x que permanece un huésped.

a) Complete las expresiones en la siguiente función definida por partes.

$$T(x) = \begin{cases} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

b) Determine $T(2)$, $T(3)$ y $T(5)$.

c) ¿Qué representan las respuestas del inciso b)?

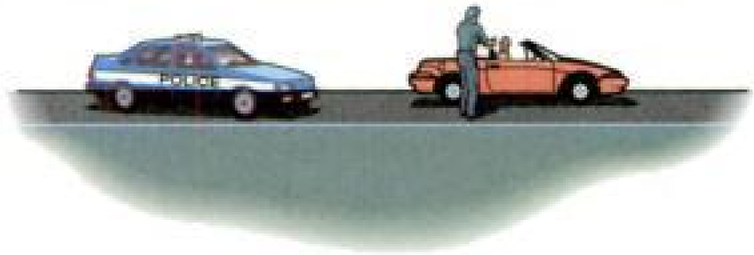
69. Multas por exceso de velocidad En cierto estado la velocidad máxima permitida en las autopistas es 65 millas/h y la mínima es 40. La multa F por violar estos límites es \$15 por cada milla arriba del máximo o abajo del mínimo.

a) Complete las expresiones en la siguiente función definida por partes, donde x es la velocidad a la que conduce una persona.

$$F(x) = \begin{cases} & \text{si } 0 < x < 40 \\ & \text{si } 40 \le x \le 65 \\ & \text{si } x > 65 \end{cases}$$

b) Determine $F(30)$, $F(50)$ y $F(75)$.

c) ¿Qué representan las respuestas del inciso b)?



70. Altura del césped Una persona poda el césped todos los miércoles por la tarde. Bosqueje una gráfica aproximada de la altura del césped como una función del tiempo en el curso de un periodo de cuatro semanas comenzando en un domingo.

71. Cambio de temperatura Se coloca un pastel congelado en un horno y se calienta durante una hora. Luego se saca y se deja enfriar antes de comerlo. Trace una gráfica aproximada de la temperatura del pastel como una función del tiempo.

72. Cambio diario de temperatura Las lecturas de temperatura T (en °F) se registraron cada dos horas desde la medianoche hasta el mediodía en Atlanta, Georgia, el día 18 de marzo de 1996. El tiempo t se midió en horas desde la media noche. Trace una gráfica aproximada de T como una función de t.

t	T
0	58
2	57
4	53
6	50
8	51
10	57
12	61

73. **Crecimiento de la población** La población P (en miles) de San José, California, de 1988 a 2000 se muestra en la tabla. (Se dan las estimaciones de medio año.) Dibuje una gráfica aproximada de P como una función del tiempo t.

t	P
1988	733
1990	782
1992	800
1994	817
1996	838
1998	861
2000	895

Descubrimiento • Debate

74. **Ejemplos de funciones** Al comienzo de esta sección se analizaron tres ejemplos de funciones ordinarias de la vida diaria: la estatura es una función de la edad, la temperatura es una función de la fecha y el costo postal es una función del peso. Dé tres ejemplos de funciones de la vida diaria.

75. **Cuatro formas de representar una función** En el cuadro de la página 154 se representaron cuatro funciones diferentes de manera verbal, algebraica, visual y numérica. Considere una función que se pueda representar en las cuatro formas y escriba las cuatro representaciones.

2.2 Gráficas de funciones

La forma más importante de representar una función es por medio de su gráfica. En esta sección se investiga con más detalle el concepto de graficar funciones.

Graficación de funciones

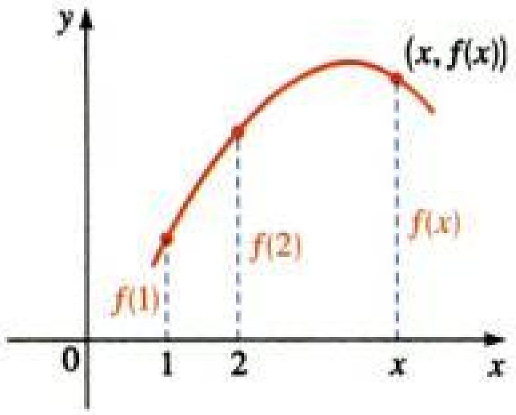


Figura 1
La altura de la gráfica arriba del punto x es el valor de $f(x)$.

La gráfica de una función

Si f es una función con dominio A, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

En otras palabras, la gráfica de f es el conjunto de los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$; es decir, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

La gráfica de una función f da un cuadro del comportamiento o "historia de vida" de la función. Se puede leer el valor de $f(x)$ de la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto x (véase figura 1).

Una función f de la forma $f(x) = mx + b$ se llama **función lineal** porque su gráfica es la de la ecuación $y = mx + b$, que representa una recta con pendiente m y y-ordenada al origen b. Un caso especial de una función lineal se presenta cuando la pendiente es $m = 0$. La función $f(x) = b$, donde b es un determinado número, se llama **función constante** porque todos sus valores son el mismo número, a saber, b. Su gráfica es la recta horizontal $y = b$. En la figura 2 se muestran las gráficas de la función constante $f(x) = 3$ y la función lineal $f(x) = 2x + 1$.

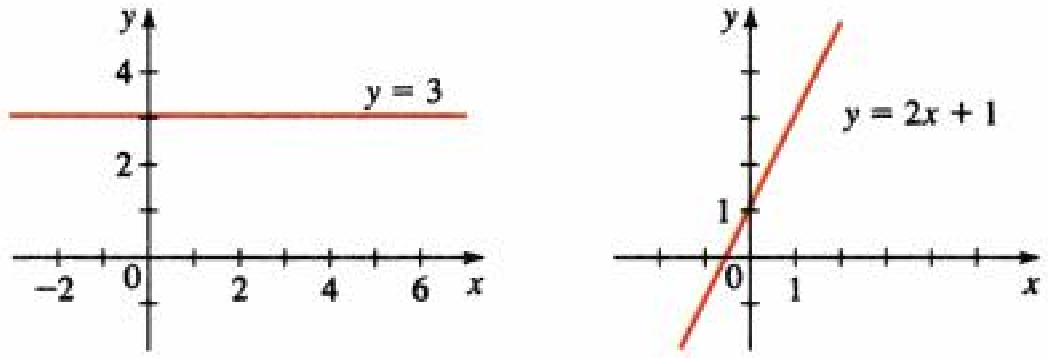


Figura 2 La función constante $f(x) = 3$ La función lineal $f(x) = 2x + 1$

Ejemplo 1 Graficación de funciones

Trace las gráficas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2$ b) $g(x) = x^3$ c) $h(x) = \sqrt{x}$

Solución Primero se construye una tabla de valores. Luego se grafican los puntos expresados en la tabla y se unen mediante una curva lisa para obtener la gráfica. Las gráficas se bosquejan en la figura 3.

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
± 1	1
± 2	4
± 3	9

x	$g(x) = x^3$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
-1	-1
-2	-8

x	$h(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$
4	2
5	$\sqrt{5}$

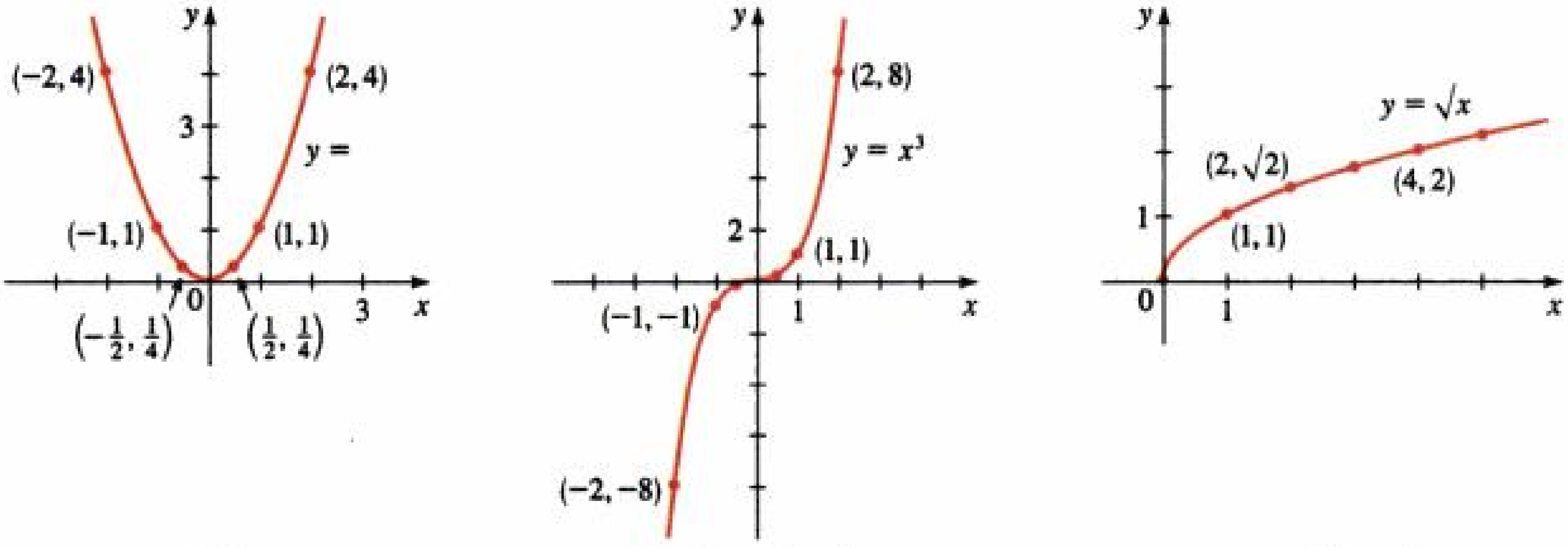
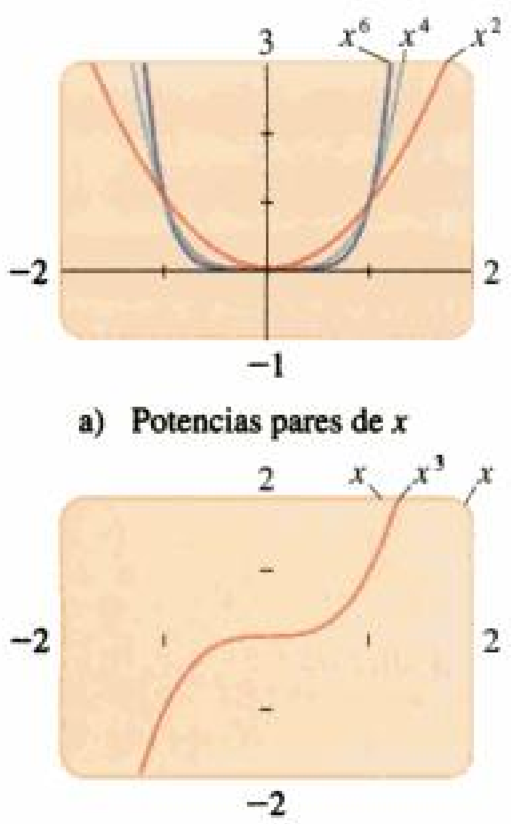


Figura 3 a) $f(x) =$ b) $g(x) = x^3$ c) $h(x) = \sqrt{x}$ ■

Una forma conveniente de graficar una función es usar una calculadora de graficación, como en el ejemplo siguiente.



a) Potencias pares de x

b) Potencias impares de x

Figura 4
Una familia de funciones exponenciales $f(x) = x^n$

Ejemplo 2 Una familia de funciones exponenciales

a) Grafique las funciones $f(x) = x^n$ para $n = 2$, 4 y 6 en el rectángulo de visión $[-2, 2]$ por $[-1, 3]$.

b) Grafique las funciones $f(x) = x^n$ para $n = 1$, 3 y 5 en el rectángulo de visión $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$.

c) ¿Qué conclusiones puede sacar de estas gráficas?

Solución Las gráficas de los incisos a) y b) se muestran en la figura 4.

c) Se ve que la forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar.

Si n es par, la gráfica de $f(x) = x^n$ es similar a la parábola $y = x^2$.
Si n es impar, la gráfica de $f(x) = x^n$ es similar a la de $y = x^3$. ■

Observe en la figura 4 que cuando n crece la gráfica de $y = x^n$ se vuelve más plana cerca de cero y más inclinada cuando $x > 1$. Cuando $0 < x < 1$, las potencias menores de x son las funciones "más grandes". Pero cuando $x > 1$, las potencias mayores de x son las funciones dominantes.

Obtención de información de la gráfica de una función

Los valores de una función se representan por la altura de su gráfica arriba del eje x. Así, los valores de una función se pueden leer de su gráfica.

Ejemplo 3 Halle los valores de una función a partir de una gráfica

La función T graficada en la figura 5 da la temperatura entre el mediodía y las 6 P.M. en cierta estación meteorológica.

a) Determine $T(1)$, $T(3)$ y $T(5)$.

b) ¿Qué es más grande, $T(2)$ o $T(4)$?

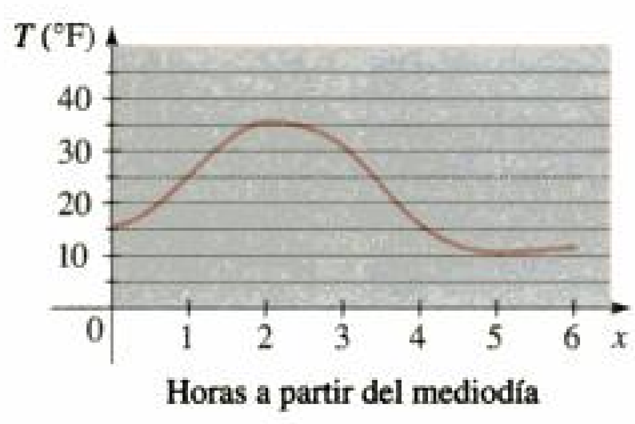


Figura 5
Función de temperatura

Solución

a) $T(1)$ es la temperatura a la 1 P.M. Está representada por la altura de la gráfica sobre el eje x en $x = 1$. Por lo tanto, $T(1) = 25$. De manera similar, $T(3) = 30$ y $T(5) = 10$.

b) Puesto que la gráfica es mayor en $x = 2$ que en $x = 4$, se deduce que $T(2)$ es más grande que $T(4)$. ■

La gráfica de una función ayuda a ilustrar el dominio y el rango de la función en el eje x y el eje y como se muestra en la figura 6.

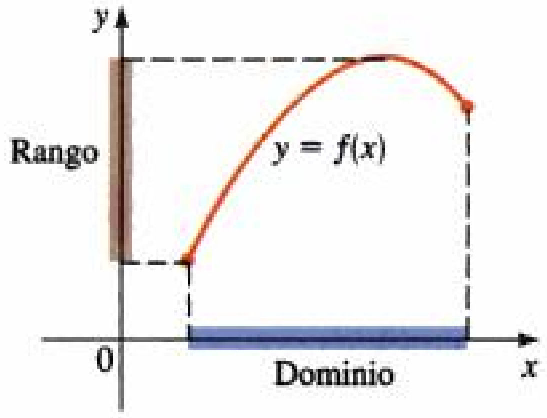


Figura 6
Dominio y rango de f

Ejemplo 4 Halle el dominio y el rango de una gráfica

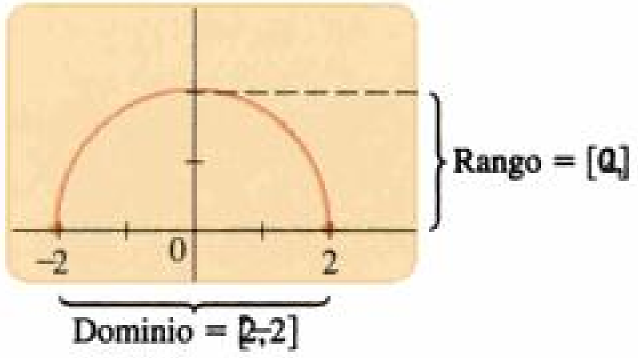
a) Use una calculadora de graficación para trazar la gráfica de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

b) Halle el dominio y el rango de f.

Solución

a) La gráfica se muestra en la figura 7.

Figura 7
Gráfica de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$



b) De la gráfica de la figura 7 se ve que el dominio es $[-2, 2]$ y el rango es $[0, 2]$. ■

Graficación de funciones definidas por partes

Una función por partes se define mediante fórmulas distintas en diferentes partes de su dominio. Como se podría esperar, la gráfica de tal función consiste en trozos separados.

Ejemplo 5 Gráfica de una función definida por partes

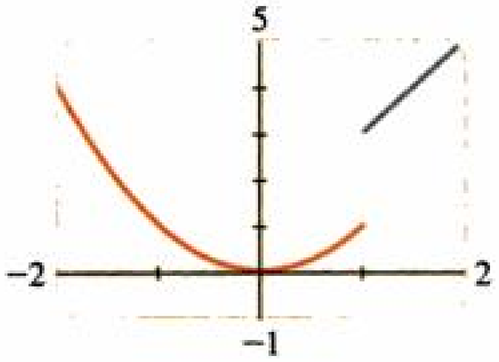
Bosqueje la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución Si $x \leq 1$, entonces $f(x) = x^2$, así que la parte de la gráfica a la izquierda de $x = 1$ coincide con la gráfica de $y = x^2$, que se bosquejó en la figura 3. Si $x > 1$, entonces $f(x) = 2x + 1$, de modo que la parte de la gráfica a la derecha

En muchas calculadoras de graficación, la gráfica de la figura 8 se puede producir por medio de funciones lógicas en la calculadora. Por ejemplo, en la TI-83 la siguiente ecuación da la gráfica requerida:

$$Y_1 = (X \le 1)X\text{^}2 + (X > 1)(2X + 1)$$



(Para evitar la línea vertical extraña entre las dos partes de la gráfica, ponga la calculadora en el modo `Dot` (punto).)

de $x = 1$ coincide con la recta $y = 2x + 1$, que se grafica en la figura 2. Esto permite trazar la gráfica en la figura 8.

El punto sólido en (1, 1) indica que este punto está incluido en la gráfica; el punto abierto en (1, 3) indica que este punto está excluido de la gráfica.

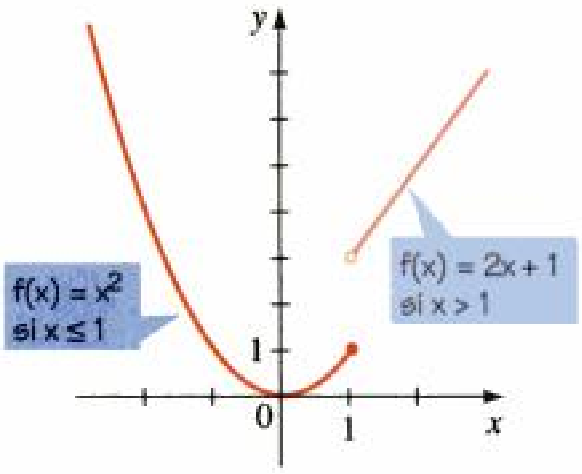


Figura 8

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

■

Ejemplo 6 Gráfica de la función valor absoluto

Trace la gráfica de la función valor absoluto $f(x) = |x|$.

Solución Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Con el mismo método del ejemplo 5, se nota que la gráfica de f coincide con la recta $y = x$ a la derecha del eje y y coincide con la recta $y = -x$ a la izquierda del eje y (véase figura 9).

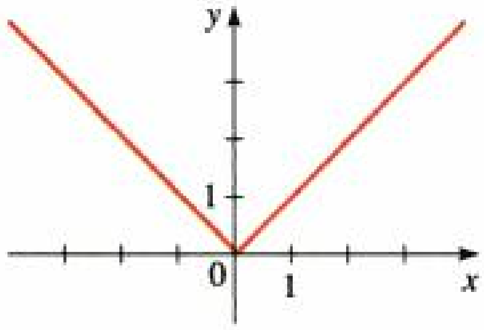


Figura 9
Gráfica de $f(x) = |x|$

■

La **función máximo entero** se define por

$$[\![x]\!] = \text{máximo entero menor que o igual a } x$$

Por ejemplo, $[\![2]\!] = 2$, $[\![2.3]\!] = 2$, $[\![1.999]\!] = 1$, $[\![0.002]\!] = 0$, $[\![-3.5]\!] = -4$, $[\![-0.5]\!] = -1$.

Ejemplo 7 Gráfica de la función máximo entero

Bosqueje la gráfica de $f(x) = [\![x]\!]$.

Solución La tabla muestra los valores de f para algunos valores de x. Note que $f(x)$ es constante entre enteros consecutivos de modo que la gráfica entre enteros es un segmento de recta horizontal como se muestra en la figura 10.

x	$[\![x]\!]$
$\vdots$	$\vdots$
$-2 \le x < -1$	-2
$-1 \le x < 0$	-1
$0 \le x < 1$	0
$1 \le x < 2$	1
$2 \le x < 3$	2
$\vdots$	$\vdots$

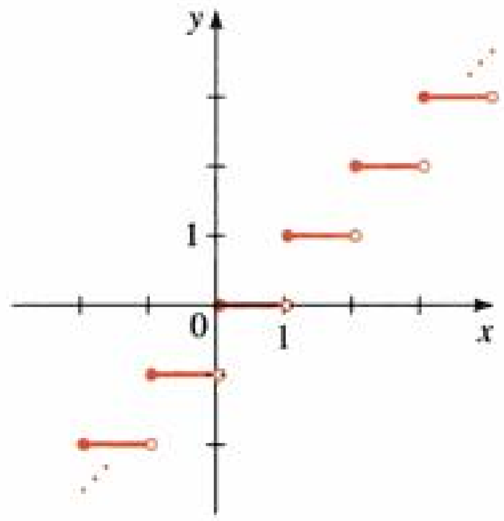


Figura 10
La función máximo entero, $y = [\![x]\!]$ ■

La función máximo entero es un ejemplo de una **función escalón**. En el ejemplo siguiente se da un ejemplo del mundo real de una función escalón.

Ejemplo 8 La función costo para llamadas telefónicas de larga distancia

El costo de una llamada telefónica diurna de larga distancia desde Toronto a Mumbai, India, es 69 centavos para el primer minuto y 58 centavos por cada minuto adicional (o parte de un minuto). Dibuje la gráfica del costo C (en dólares) de la llamada telefónica como una función del tiempo t (en minutos).

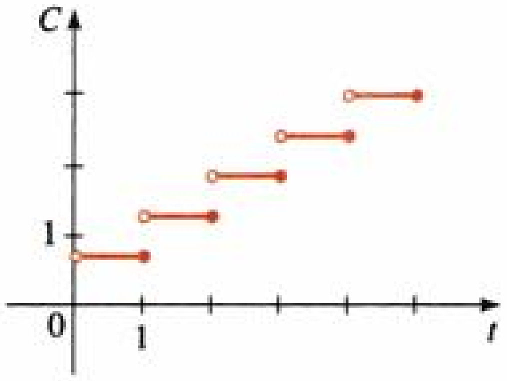


Figura 11
Costo de una llamada de larga distancia

Solución Sea $C(t)$ el costo por t minutos. Puesto que $t > 0$, el dominio de la función es $(0, \infty)$. De la información suministrada, se tiene

$$
\begin{aligned}
C(t) &= 0.69 && \text{si } 0 < t \le 1 \\
C(t) &= 0.69 + 0.58 = 1.27 && \text{si } 1 < t \le 2 \\
C(t) &= 0.69 + 2(0.58) = 1.85 && \text{si } 2 < t \le 3 \\
C(t) &= 0.69 + 3(0.58) = 2.43 && \text{si } 3 < t \le 4
\end{aligned}
$$

y así sucesivamente. La gráfica se muestra en la figura 11. ■

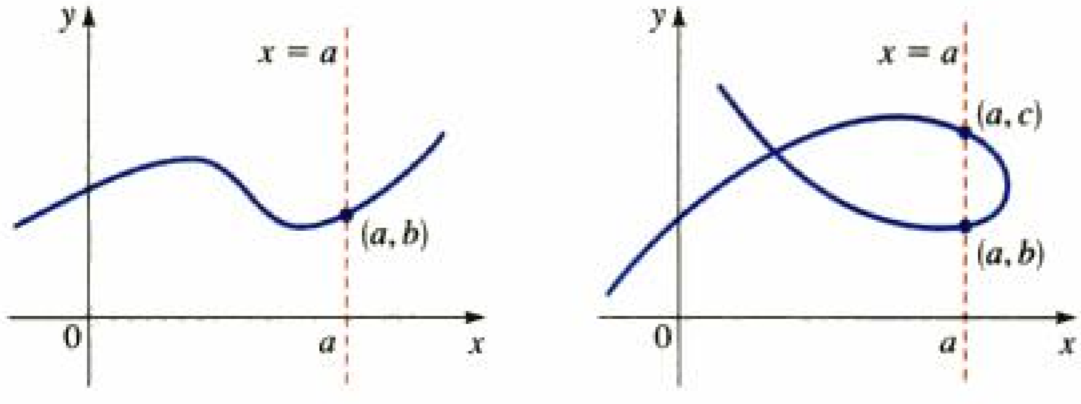
Prueba de la línea vertical

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la pregunta: ¿qué curvas en el plano xy son gráficas de funciones? Esto se contesta mediante la prueba siguiente.

Prueba de la línea vertical

Una curva en el plano coordenado es la gráfica de una función si y sólo si ninguna línea vertical corta la curva más de una vez.

Se puede ver de la figura 12 por qué es cierta la prueba de la línea vertical. Si cada línea vertical $x = a$ corta una curva sólo una vez en (a, b), entonces $f(a) = b$ define exactamente un valor funcional. Pero si una línea $x = a$ corta la curva dos veces en (a, b) y en (a, c), entonces la curva no puede representar una función porque una función no puede asignar dos valores diferentes para a.



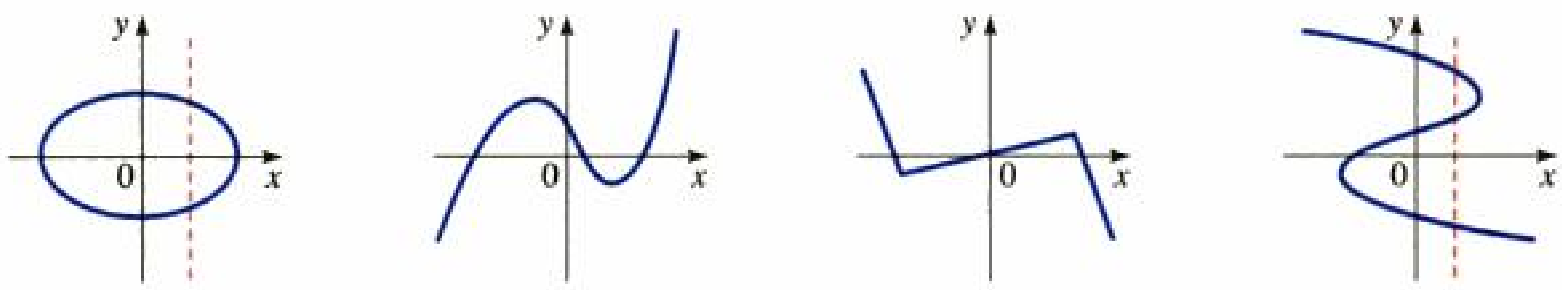
Gráfica de una función

No es una gráfica de una función

Figura 12
Prueba de la línea vertical

Ejemplo 9 Uso de la prueba de la línea vertical

Con la prueba de la línea vertical, se ve que las curvas de los incisos b) y c) de la figura 13 representan funciones, no así para el caso de los incisos a) y d).



a) b) c) d)

Figura 13

■

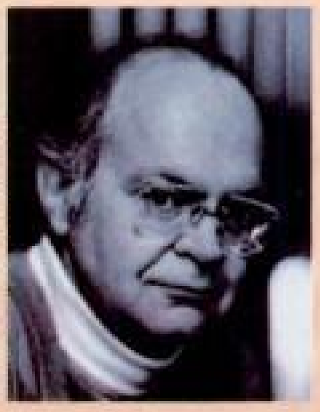
Ecuaciones que definen funciones

Cualquier ecuación en las variables x y y define una relación entre estas variables. Por ejemplo, la ecuación

$$y - x^2 = 0$$

define una relación entre y y x. ¿Esta ecuación define a y como una *función* de x? Para investigar, se despeja y, y se obtiene

$$y = x^2$$



Stanford University News Service

Donald Knuth nació en Milwaukee en 1938 y es profesor emérito de computación en la Universidad de Stanford. Aún como estudiante de licenciatura en Caltech, comenzó a escribir una serie monumental de libros titulados *The art of Computer Programming*. El presidente Carter le otorgó la medalla nacional de Ciencia en 1979. Cuando Knuth era alumno de secundaria, se fascinó con las gráficas de funciones y de manera laboriosa trazó muchos cientos de ellas porque quería ver el comportamiento de una gran variedad de funciones. (En la actualidad, por supuesto, es bastante fácil usar las computadoras y calculadoras de graficación para hacer esto.) Knuth es famoso por su invención de $\TeX$, un sistema de composición tipográfica asistido por computadora. Este sistema se empleó en la preparación del manuscrito para este libro. También escribió una novela titulada *Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned On to Pure Mathemátics and Found Total Happiness.*

El doctor Knuth ha recibido numerosos honores, entre ellos la elección como asociado de la Academia Francesa de Ciencias y como profesor invitado de la Royal Society.

Se ve que la ecuación define una regla, o función, que da un valor de y para cada valor de x. Se puede expresar esta regla en notación de función como

$$f(x) = x^2$$

Pero no toda ecuación define a y como una función de x, como se ve en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 10 Ecuaciones que definen funciones

¿La ecuación define a y como una función de x?

a) $y - x^2 = 2$

b) $x^2 + y^2 = 4$

Solución

a) Si se expresa y en términos de x se obtiene

$$\begin{aligned} y - x^2 &= 2 \\ y &= x^2 + 2 && \text{Sumar } x^2 \end{aligned}$$

La última ecuación es una regla que da un valor de y para cada valor de x, así que define a y como una función de x. Se puede escribir la función como $f(x) = x^2 + 2$.

b) Se intenta expresar y en términos de x:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ y^2 &= 4 - x^2 && \text{Restar } x^2 \\ y &= \pm\sqrt{4 - x^2} && \text{Sacar las raíces cuadradas} \end{aligned}$$

De la última ecuación se obtienen dos valores de y para un determinado valor de x. Por lo tanto, la ecuación no define a y como una función de x. ■

Las gráficas de las ecuaciones del ejemplo 10 se muestran en la figura 14. La prueba de la línea vertical muestra de forma gráfica que la ecuación del ejemplo 10(a) define una función pero la ecuación del ejemplo 10(b) no.

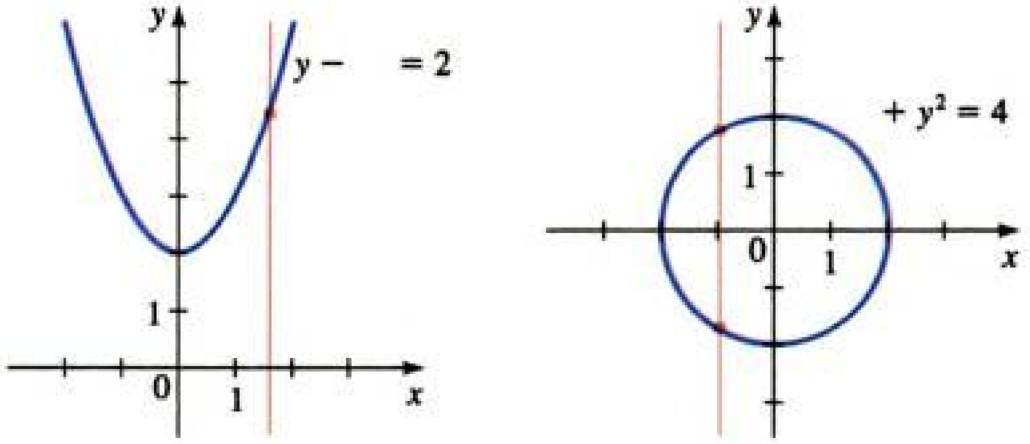
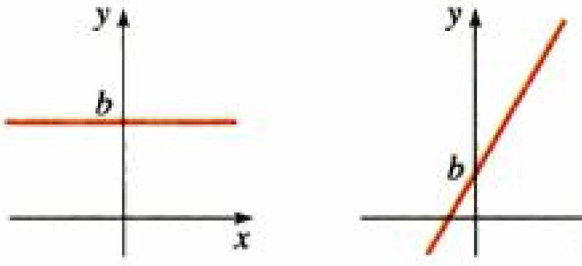


Figura 14 a) b)

En la tabla siguiente se muestran las gráficas de algunas funciones que se verán con frecuencia en este libro.

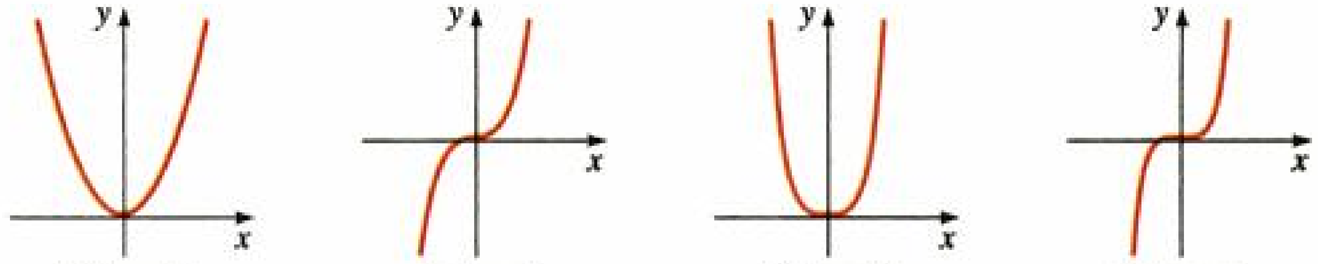
Algunas funciones y sus gráficas

Funciones lineales
$f(x) = mx + b$



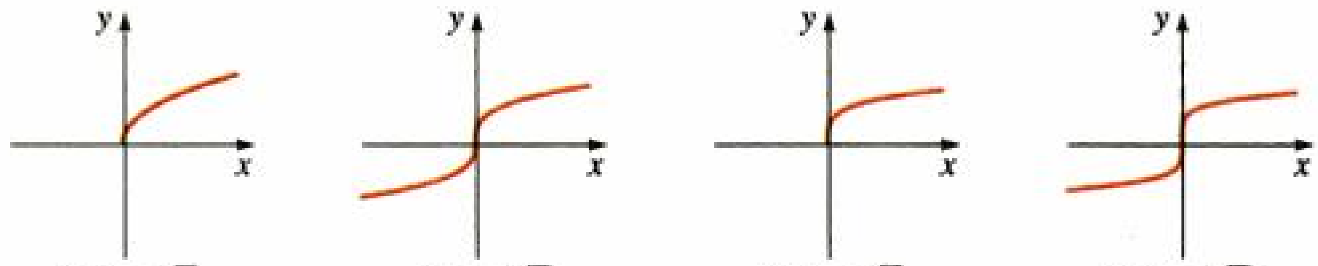
$f(x) = b$ $\quad$ $f(x) = mx + b$

Funciones exponenciales
$f(x) = x^n$



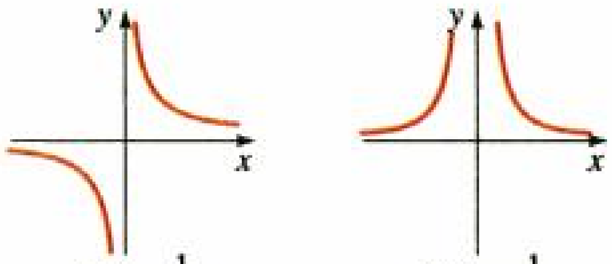
$f(x) = x^2$ $\quad$ $f(x) = x^3$ $\quad$ $f(x) = x^4$ $\quad$ $f(x) = x^5$

Funciones de raíz
$f(x) = \sqrt[n]{x}$



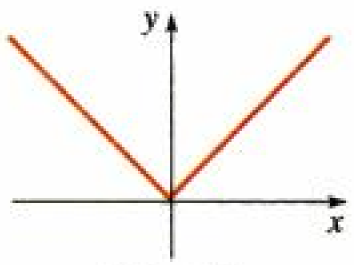
$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad$ $f(x) = \sqrt[4]{x}$ $\quad$ $f(x) = \sqrt[5]{x}$

Funciones recíprocas
$f(x) = 1/x^n$



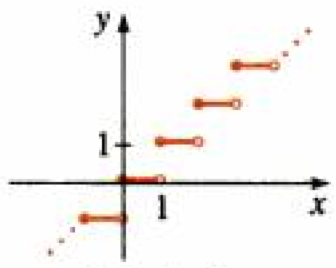
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Función valor absoluto
$f(x) = |x|$



$f(x) = |x|$

Función entero máximo
$f(x) = [\![x]\!]$



$f(x) = [\![x]\!]$

2.2 Ejercicios

1–22 ■ Trace la gráfica de la función construyendo primero una tabla de valores.

1. $f(x) = 2$ **2.** $f(x) = -3$

3. $f(x) = 2x - 4$ **4.** $f(x) = 6 - 3x$

5. $f(x) = -x + 3, \quad -3 \leq x \leq 3$

6. $f(x) = \dfrac{x-3}{2}, \quad 0 \leq x \leq 5$

7. $f(x) = -x^2$ **8.** $f(x) = x^2 - 4$

9. $g(x) = x^3 - 8$ **10.** $g(x) = 4x^2 - x^4$

11. $g(x) = \sqrt{x+4}$ **12.** $g(x) = \sqrt{-x}$

13. $F(x) = \dfrac{1}{x}$ **14.** $F(x) = \dfrac{1}{x+4}$

15. $H(x) = |2x|$ **16.** $H(x) = |x+1|$

17. $G(x) = |x| + x$ **18.** $G(x) = |x| - x$

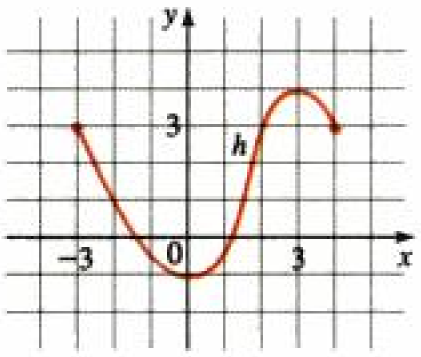
19. $f(x) = |2x - 2|$ **20.** $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

21. $g(x) = \dfrac{2}{x^2}$ **22.** $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2}$

23. Se da la gráfica de una función h.

a) Determine $h(-2)$, $h(0)$, $h(2)$ y $h(3)$.

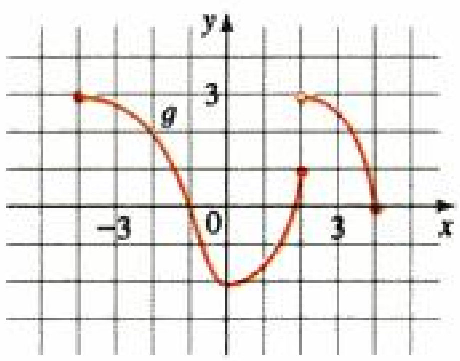
b) Halle el dominio y el rango de h.



24. Se da la gráfica de una función g.

a) Determine $g(-4)$, $g(-2)$, $g(0)$, $g(2)$ y $g(4)$.

b) Halle el dominio y el rango de g.

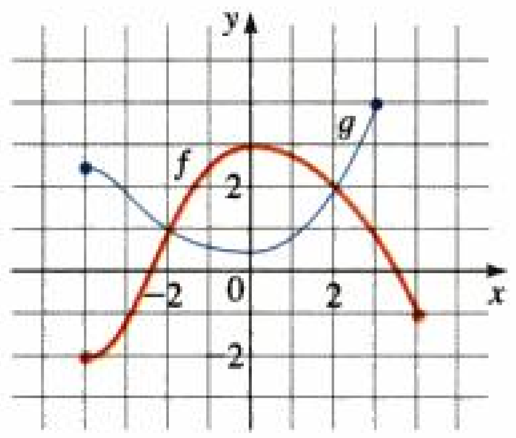


25. Se dan las gráficas de las funciones f y g.

a) ¿Cuál es más grande, $f(0)$ o $g(0)$?

b) ¿Cuál es más grande, $f(-3)$ o $g(-3)$?

c) ¿Para qué valores de x es $f(x) = g(x)$?

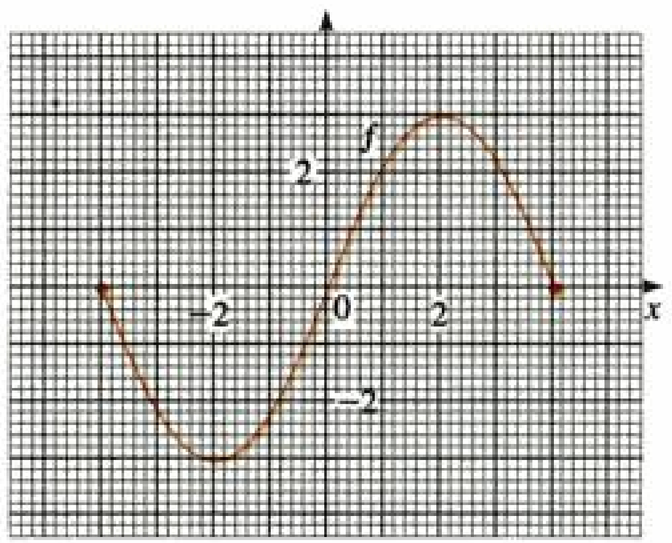


26. Se da la gráfica de la función f.

a) Estime $f(0.5)$ al décimo más próximo.

b) Estime $f(3)$ al décimo más próximo.

c) Encuentre los números x en el dominio de f para los que $f(x) = 1$.



27–36 ■ Se tiene una función f.

a) Emplee una calculadora de graficación para trazar la gráfica de f.

b) Halle el dominio y el rango de f a partir de la gráfica.

27. $f(x) = x - 1$ **28.** $f(x) = 2(x+1)$

29. $f(x) = 4$ **30.** $f(x) = -x^2$

31. $f(x) = 4 - x^2$ **32.** $f(x) = x^2 + 4$

33. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ **34.** $f(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

35. $f(x) = \sqrt{x - 1}$ **36.** $f(x) = \sqrt{x + 2}$

37–50 ■ Bosqueje la gráfica de la función definida por partes.

37. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < -2 \\ 5 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

41. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 3 - x & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

45. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

47. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \le 2 \\ 3 & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| \le 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

49. $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ -x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

50. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 0 \\ 9 - x^2 & \text{si } 0 < x \le 3 \\ x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

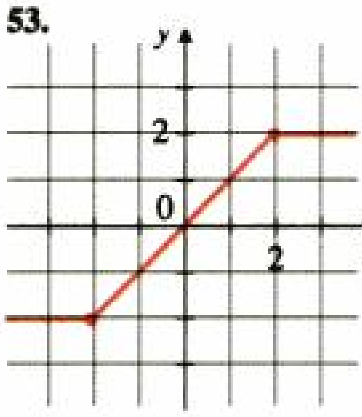
51–52 ■ Emplee un dispositivo de graficación para trazar la gráfica de la función definida por partes. (Véase la nota al margen en la página 162.)

51. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

52. $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x > 1 \\ (x - 1)^3 & \text{si } x \le 1 \end{cases}$

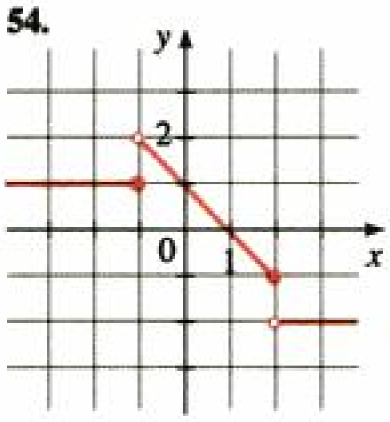
53–54 ■ Se da la gráfica de la función definida por partes. Determine una fórmula para la función en la forma indicada.

53.



$f(x) = \begin{cases} & \text{si } x < -2 \\ & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ & \text{si } x > 2 \end{cases}$

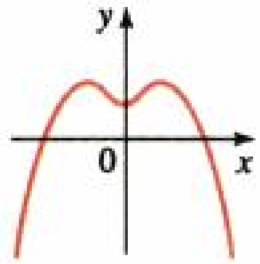
54.



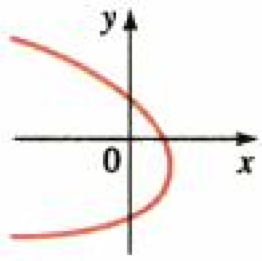
$f(x) = \begin{cases} & \text{si } x \le -1 \\ & \text{si } -1 < x \le 2 \\ & \text{si } x > 2 \end{cases}$

55–56 ■ Determine si la curva es la gráfica de una función de x.

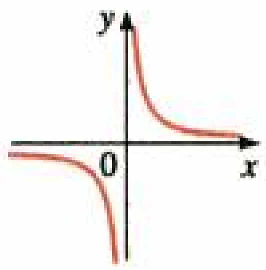
55. **a)**



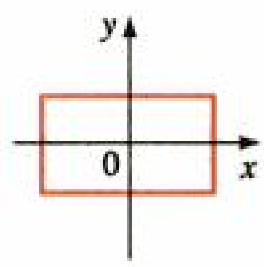
b)



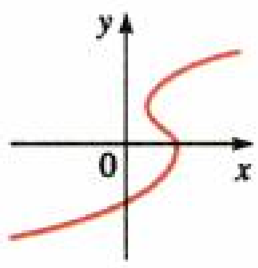
c)



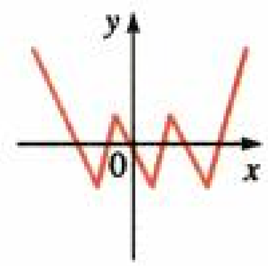
d)



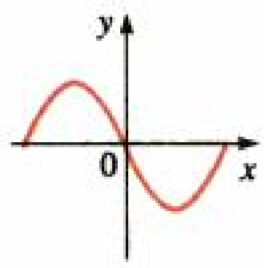
56. **a)**



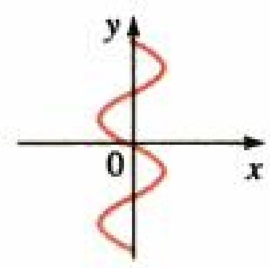
b)



c)

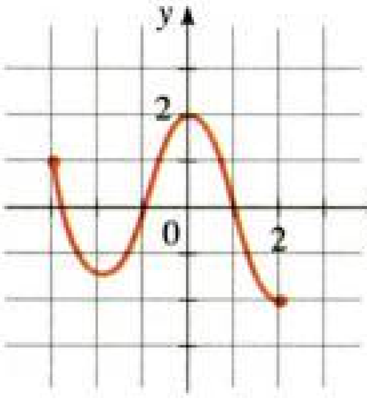


d)

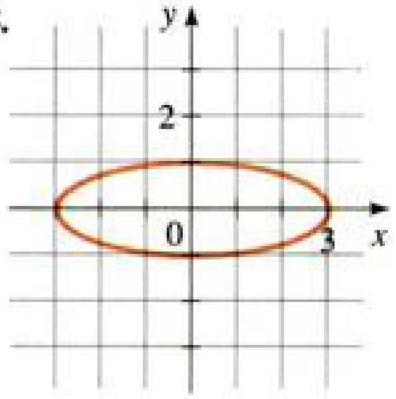


57–60 ■ Determine si la curva es la gráfica de una función x. En caso afirmativo, exprese el dominio y el rango de la función.

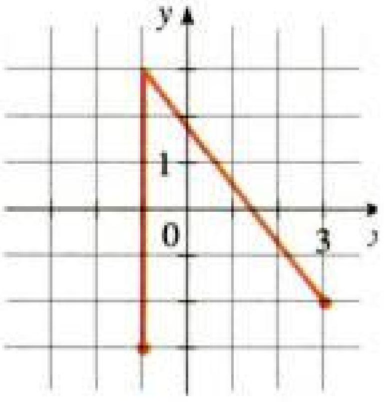
57.



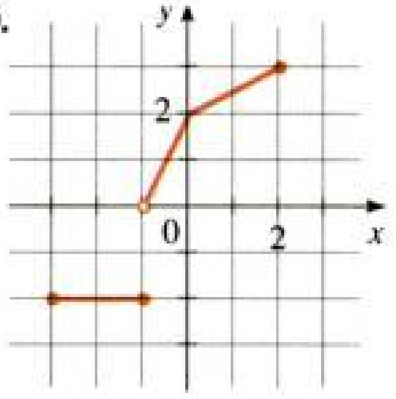
58.



59.



60.



61–72 ■ Determine si la ecuación define a y como una función de x. (Véase el ejemplo 10.)

61. $x^2 + 2y = 4$

62. $3x + 7y = 21$

63. $x = y^2$

64. $x^2 + (y - 1)^2 = 4$

65. $x + y^2 = 9$

66. $x^2 + y = 9$

67. $x^2y + y = 1$

68. $\sqrt{x} + y = 12$

69. $2|x| + y = 0$

70. $2x + |y| = 0$

71. $x = y^3$

72. $x = y^4$

73–78 ■ Se da una familia de funciones. En los incisos a) y b) grafique los miembros dados de la familia en el rectángulo de visión indicado. En el inciso c) exprese las conclusiones que pueda deducir de sus gráficas.

73. $f(x) = x^2 + c$

a) $c = 0, 2, 4, 6;\ [-5, 5]$ por $[-10, 10]$

b) $c = 0, -2, -4, -6;\ [-5, 5]$ por $[-10, 10]$

c) ¿Cómo afecta la gráfica el valor de c?

74. $f(x) = (x - c)^2$

a) $c = 0, 1, 2, 3;\ [-5, 5]$ por $[-10, 10]$

b) $c = 0, -1, -2, -3;\ [-5, 5]$ por $[-10, 10]$

c) ¿Cómo afecta la gráfica el valor de c?

75. $f(x) = (x - c)^3$

a) $c = 0, 2, 4, 6;\ [-10, 10]$ por $[-10, 10]$

b) $c = 0, -2, -4, -6;\ [-10, 10]$ por $[-10, 10]$

c) ¿Cómo afecta la gráfica el valor de c?

76. $f(x) = cx^2$

a) $c = 1, \frac{1}{2}, 2, 4;\ [-5, 5]$ por $[-10, 10]$

b) $c = 1, -1, -\frac{1}{2}, -2;\ [-5, 5]$ por $[-10, 10]$

c) ¿Cómo afecta la gráfica el valor de c?

77. $f(x) = x^c$

a) $c = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6};\ [-1, 4]$ por $[-1, 3]$

b) $c = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5};\ [-3, 3]$ por $[-2, 2]$

c) ¿Cómo afecta la gráfica el valor de c?

78. $f(x) = 1/x^n$

a) $n = 1, 3;\ [-3, 3]$ por $[-3, 3]$

b) $n = 2, 4;\ [-3, 3]$ por $[-3, 3]$

c) ¿Cómo afecta la gráfica el valor de n?

79–82 ■ Encuentre una función cuya gráfica es la curva dada.

79. El segmento de recta que une los puntos $(-2, 1)$ y $(4, -6)$

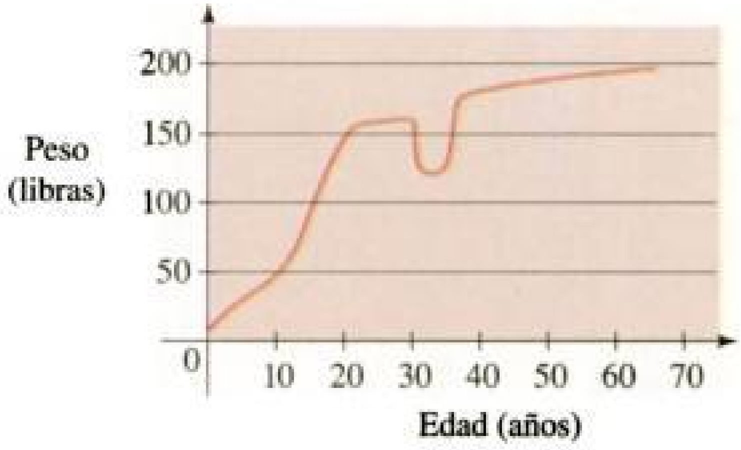
80. El segmento de recta que une los puntos $(-3, -2)$ y $(6, 3)$

81. La mitad superior del círculo $x^2 + y^2 = 9$

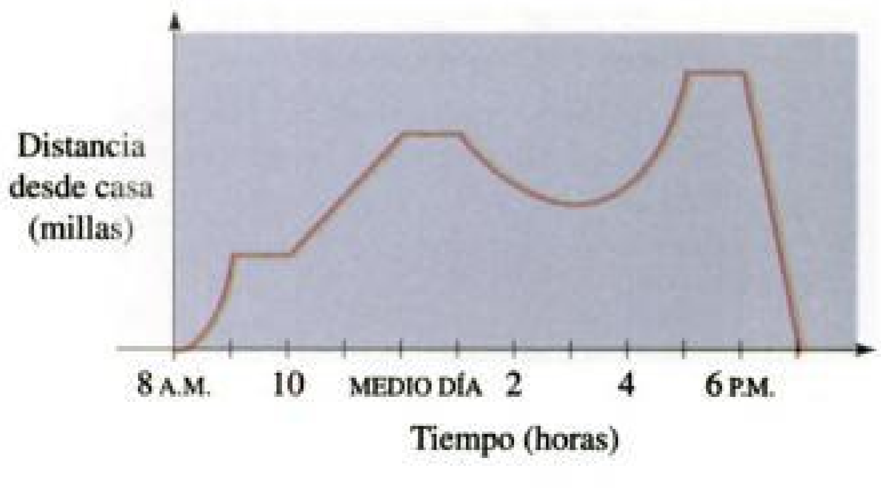
82. La mitad inferior del círculo $x^2 + y^2 = 9$

Aplicaciones

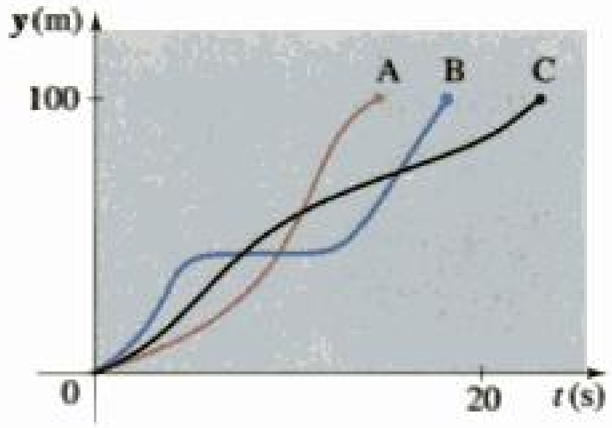
83. Función peso La gráfica da el peso de cierta persona como una función de la edad. Describa en palabras cómo el peso de esta persona ha variado con el tiempo. ¿Qué cree que sucedió cuando esta persona tenía 30 años de edad?



84. Función distancia La gráfica da una distancia del vendedor desde su casa como una función del tiempo en cierto día. Describa en palabras lo que indica la gráfica acerca de su viaje en este día.



85. Carrera con obstáculos Tres corredores compiten en una carrera de 100 metros con obstáculos. En la gráfica se ilustra la distancia como una función del tiempo para cada corredor. Describa en palabras lo que indica la gráfica acerca de esta competencia. ¿Quién ganó esta carrera? ¿Cada corredor termina la carrera? ¿Qué cree que le sucedió al corredor B?

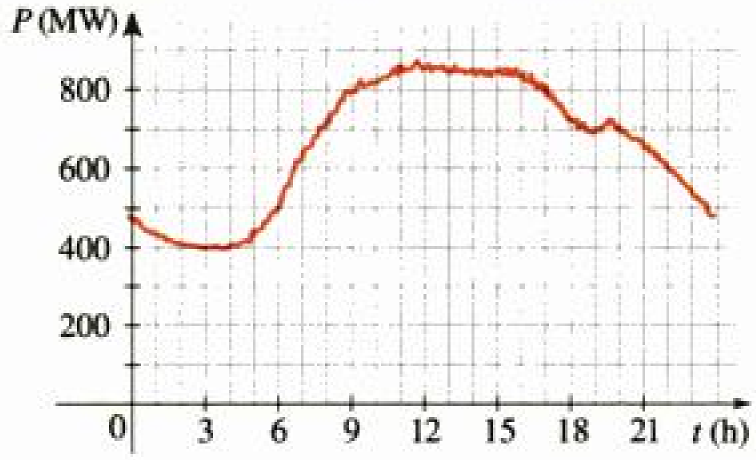


86. Consumo de energía En la figura se muestra el consumo de energía en San Francisco para el 19 de septiembre de 1996 (P se mide en megawatts; t se mide en horas comenzando a la medianoche).

a) ¿Cuál fue el consumo de energía a las 6 A.M.? ¿A las 6 P.M.?

b) ¿Cuándo fue mínimo el consumo de energía?

c) ¿Cuándo fue máximo el consumo de energía?



Fuente: Pacific Gas & Electric

87. Terremoto En la gráfica se muestra la aceleración vertical del suelo desde el terremoto de Northridge en 1994 en Los Ángeles, medida mediante un sismógrafo. (Aquí t representa el tiempo en segundos.)

a) ¿En qué tiempo t el terremoto produjo primero movimientos notables de la tierra?

b) ¿En qué tiempo t al parecer terminó el terremoto?

c) ¿En qué tiempo t el terremoto alcanzó la máxima intensidad?

Fuente: Calif. Dept. de Minas y Geología

88. Tarifas eléctricas Westside Energy cobra a sus clientes una tarifa base de \$6.00 por mes, más 10¢ por kilowatt-hora (kWh) por los primeros 300 kWh empleados y 6¢ por kWh para todo consumo mayor de 300 kWh. Suponga que un cliente utiliza x kWh de electricidad en un mes.

a) Exprese el costo mensual E como una función de x.

b) Grafique la función E para $0 \leq x \leq 600$.

89. Función para taxis Una compañía de taxis cobra \$2.00 por la primera milla (o parte de una milla) y 20 centavos por cada décima de milla sucesiva (o parte). Exprese el costo C (en dólares) de un viaje como una función de la distancia x recorrida (en millas) para $0 < x < 2$, y trace la gráfica de esta función.

90. Tarifas postales La tarifa doméstica de correos para cartas de primera clase que pesan 12 onzas o menos es 37 centavos por la primera onza (o parte de una onza). Exprese los gastos de envío P como una función del peso x de una carta, con $0 < x \leq 12$, y trace la gráfica de esta función.

Descubrimiento • Debate

91. ¿Cuándo una gráfica representa una función? Para cada entero n, la gráfica de la ecuación $y = x^n$ es la gráfica de una función, a saber $f(x) = x^n$. Explique por qué la gráfica de $x = y^2$ *no* es la gráfica de una función de x. ¿La gráfica de $x = y^3$ es la gráfica de una función de x? Si es así, ¿de qué función de x es la gráfica? Determine para qué n enteros la gráfica de $x = y^n$ es la gráfica de una función de x.

92. Funciones escalón En el ejemplo 8 y los ejercicios 89 y 90 se dan funciones cuyas gráficas consisten en segmentos de recta horizontales. Esta clase de funciones se llama *funciones escalón*, porque sus gráficas se asemejan a escaleras. Dé algunos otros ejemplos de funciones escalón que surgen en la vida diaria.

93. Funciones escalón extendidas Bosqueje las gráficas de las funciones $f(x) = [\![x]\!]$, $g(x) = [\![2x]\!]$ y $h(x) = [\![3x]\!]$ en gráficas separadas. ¿Cómo se relacionan las gráficas? Si n es un entero positivo, ¿a qué se parece la gráfica de $k(x) = [\![nx]\!]$?

94. Gráfica del valor absoluto de una función

a) Dibuje las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + x - 6$ y $g(x) = |x^2 + x - 6|$. ¿Cómo se relacionan las gráficas de f y g?

b) Trace las gráficas de las funciones $f(x) = x^4 - 6x^2$ y $g(x) = |x^4 - 6x^2|$. ¿Cómo se relacionan las gráficas de f y g?

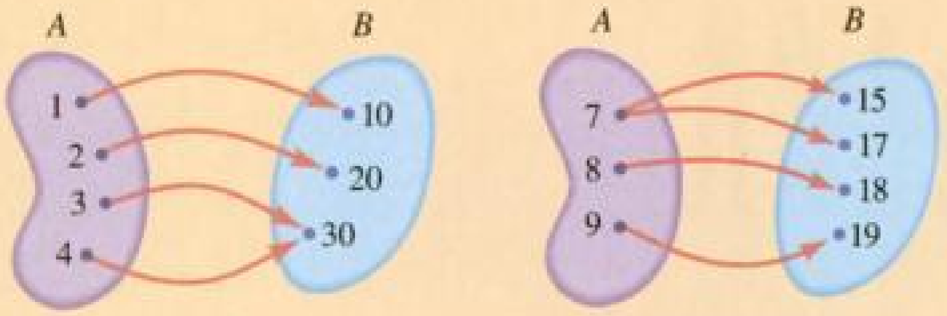
c) En general, si $g(x) = |f(x)|$, ¿cómo se relacionan las gráficas de f y g ¿Dibuje las gráficas para ilustrar su respuesta.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Relaciones y funciones

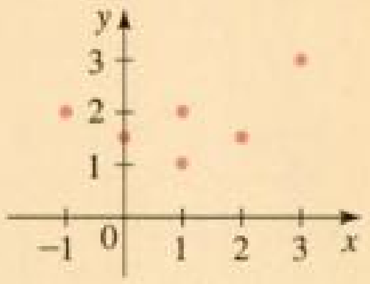
Una función f se puede representar como un conjunto de pares ordenados (x, y) donde x es la entrada y $y = f(x)$ es la salida. Por ejemplo, la función que eleva al cuadrado cada número natural se puede representar mediante los pares ordenados $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), \ldots\}$.

Una **relación** es *cualquier* colección de pares ordenados. Si los pares ordenados de una relación se denotan por (x, y) entonces el conjunto de valores de x (o entradas) es el **dominio** y el conjunto de valores de y (o salidas) es el **rango**. Con esta terminología una **función** es una relación donde para cada valor x hay *exactamente un* valor y (o para cada entrada hay *exactamente una* salida). Las correspondencias en la figura de abajo son relaciones: la primera es una función pero la segunda no porque la entrada 7 en A corresponde a dos salidas diferentes, 15 y 17, en B.



Función No es una función

Se puede describir una relación si se listan los pares ordenados en la relación o si se da la regla de correspondencia. También, puesto que una relación consiste en pares ordenados se puede trazar su gráfica. Considérense las relaciones siguientes e intente decidir cuáles son funciones.



a) La relación que consiste en los pares ordenados $\{(1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 2)\}$.
b) La relación que consiste en los pares ordenados $\{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$.
c) La relación cuya gráfica se muestra a la izquierda.
d) La relación cuyos valores de entrada son los días de enero de 2005 y cuyos valores de salida son la temperatura máxima en Los Ángeles en ese día.
e) La relación cuyos valores de entrada son los días de enero de 2005 y cuyos valores de salida son las personas nacidas en Los Ángeles en ese día.

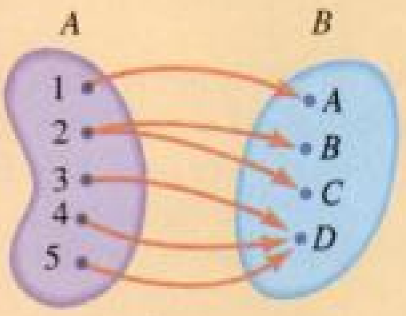
La relación del inciso a) es una función porque cada entrada corresponde a exactamente una salida. Pero la relación del inciso b) no lo es, porque la entrada 1 corresponde a dos salidas diferentes (2 y 3). La relación del inciso c) no es una función porque la entrada 1 corresponde a dos salidas diferentes (1 y 2). La relación en d) es una función porque cada día corresponde a exactamente una temperatura máxima. La relación en e) no es una función porque muchas personas (no sólo una) nacieron en Los Ángeles en muchos días de enero de 2005.

1. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{-1, 0, 1\}$. ¿La relación dada es una función de A y B?

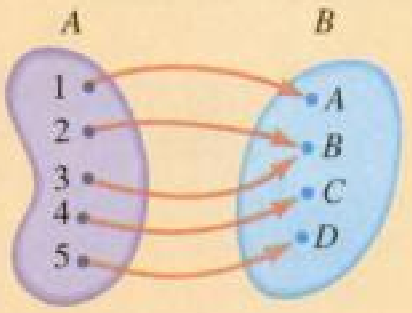
a) $\{(1, 0), (2, -1), (3, 0), (4, 1)\}$
b) $\{(1, 0), (2, -1), (3, 0), (3, -1), (4, 0)\}$

2. Determine si la correspondencia es una función.

a)



b)



3. Los datos siguientes se obtuvieron de miembros de una clase universitaria de precálculo. ¿Es una función el conjunto de pares ordenados (x, y)?

a)

x Altura	y Peso
72 pulg.	180 lb
60 pulg.	204 lb
60 pulg.	120 lb
63 pulg.	145 lb
70 pulg.	184 lb

b)

x Edad	y Número de ID
19	82-4090
21	80-4133
40	66-8295
21	64-9110
21	20-6666

c)

x Año de graduación	y Número de graduados
2005	2
2006	12
2007	18
2008	7
2009	1

4. Una ecuación en x y y define una relación, la cual puede ser una función o no (véase la página 164). Decida si la relación que consiste en los pares ordenados de números reales (x, y) que satisfacen la condición dada es una función.

a) $y = x^2$ b) $x = y^2$ c) $x \leq y$ d) $2x + 7y = 11$

5. En la vida diaria se encuentran muchas relaciones que pueden definir funciones o no. Por ejemplo, se hace corresponder a las personas con su número o números telefónicos, a los jugadores de béisbol con sus promedios de bateo o a los varones casados con sus esposas. ¿Esta última correspondencia define una función? En una sociedad en la que cada varón casado tiene exactamente una esposa la regla es una función. Pero la regla no es una función. ¿Cuáles de las siguientes relaciones cotidianas son funciones?

a) x es la hija de y (x y y son mujeres en Estados Unidos).

b) x es más alta que y (x y y son personas en California).

c) x ha recibido tratamiento dental de y (x y y son millonarios en Estados Unidos).

d) x es un dígito (0 a 9) en un número telefónico y y es una letra correspondiente.

2.3 Funciones crecientes y decrecientes; tasa de cambio promedio*

Las funciones se emplean con frecuencia para modelar cantidades cambiantes. En esta sección se aprende cómo determinar si una función es creciente o decreciente, y cómo hallar la tasa a la cual sus valores cambian cuando cambia la variable.

Funciones crecientes y decrecientes

Es muy útil saber dónde sube la gráfica de una función y donde baja. La gráfica mostrada en la figura 1 sube, baja, luego sube de nuevo conforme se va de izquierda a derecha: sube de A a B, baja de B a C, y sube de nuevo de C a D. Se dice que la función f es *creciente* cuando su gráfica sube y *decreciente* cuando su gráfica baja.

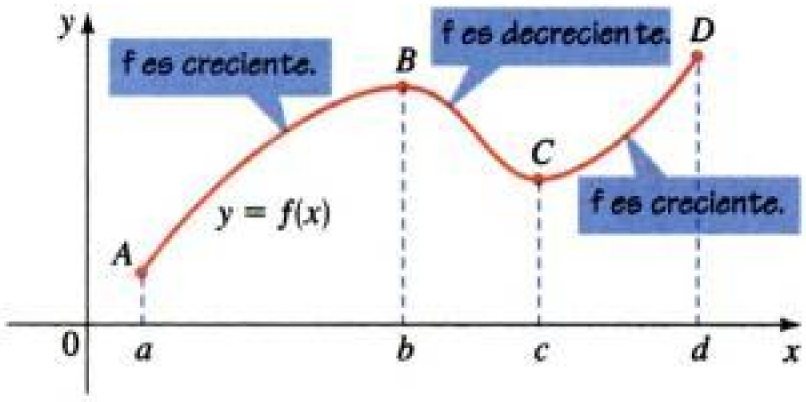


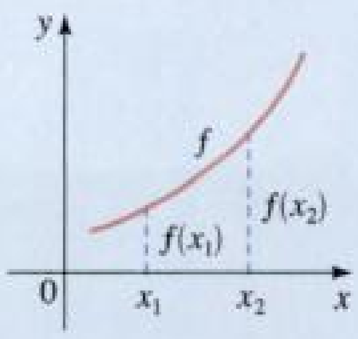
Figura 1
f es creciente en $[a, b]$ y $[c, d]$.
f es decreciente en $[b, c]$.

Se tiene la siguiente definición.

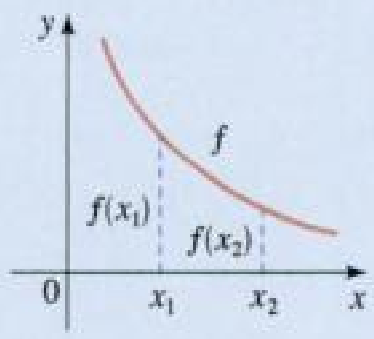
Definición de funciones crecientes y decrecientes

f es **creciente** en un intervalo I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

f es **decreciente** en un intervalo I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.



f es creciente

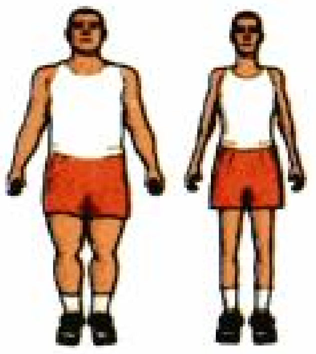


f es decreciente

* También se le llama *razón de cambio promedio.*

Ejemplo 1 Intervalos en los que una función crece y decrece

La gráfica de la figura 2 da el peso W de una persona a la edad x. Determine los intervalos en los que la función W es creciente y en los que es decreciente.



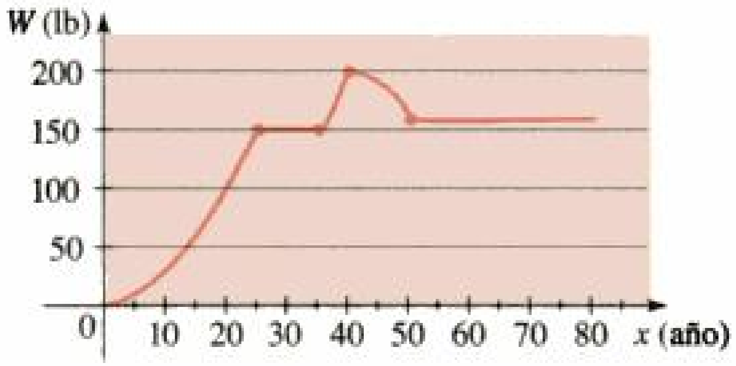


Figura 2
Peso como una función de la edad

Solución La función es creciente en [0, 25] y [35, 40]. Es decreciente en [40, 50]. La función es constante (ni creciente ni decreciente) en [25, 35] y [50, 80]. Esto significa que la persona ganó peso hasta la edad de 25 años, luego ganó peso de nuevo entre los 35 y 40 años. Perdió peso entre los 40 y 50 años. ■

Ejemplo 2 Uso de una gráfica para hallar intervalos donde la función crece y disminuye

a) Trace la gráfica de la función $f(x) = x^{2/3}$.

b) Halle el dominio y el rango de la función.

c) Encuentre los intervalos en los que f crece y disminuye.

Solución

Algunas calculadoras de graficación, como la TI-82, no evalúan $x^{2/3}$ [introducida como x^(2/3)] para x negativa. Para graficar una función como $f(x) = x^{2/3}$, se introduce como y_1 = (x^(1/3))^2 porque estas calculadoras evalúan de manera correcta potencias de la forma x^(1/n). Las calculadoras más recientes, como la TI-83 y la TI-86, no tienen este problema.

a) Se emplea una calculadora de graficación para trazar la gráfica de la figura 3.

b) De la gráfica se observa que el dominio de f es $\mathbb{R}$ y el rango es $[0, \infty)$.

c) De la gráfica se ve que f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$. ■

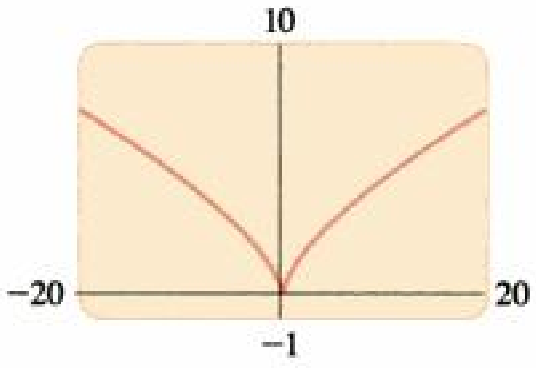


Figura 3
Gráfica de $f(x) = x^{2/3}$

Tasa de cambio promedio

Se está familiarizado con el concepto de velocidad: si conduce una distancia de 120 millas en dos horas, entonces su velocidad promedio, o tasa de recorrido, es $\frac{120 \text{ mi}}{2 \text{ h}} = 60$ mi/h.

Ahora suponga que realiza un viaje en automóvil y registra la distancia que recorre cada cierto número de minutos. La distancia s que ha recorrido es una función del tiempo t:

$$s(t) = \text{distancia total recorrida en el tiempo } t$$

Se grafica la función s como se muestra en la figura 4. En la gráfica se observa que se ha recorrido un total de 50 millas después de una hora, 75 millas después de dos horas, 140 millas después de tres horas, etc. Para hallar la velocidad *promedio* entre dos puntos cualesquiera en el viaje, se divide la distancia recorrida entre el tiempo transcurrido.

Se calcula la velocidad promedio entre la 1:00 P.M. y 4:00 P.M. El tiempo transcurrido es $4 - 1 = 3$ horas. Para hallar la distancia recorrida, se resta la distancia a la 1:00 P.M. de la distancia a las 4:00 P.M., es decir, $200 - 50 = 150$ millas. Así, la velocidad promedio es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{150 \text{ millas}}{3 \text{ horas}} = 65 \text{ millas/h}$$

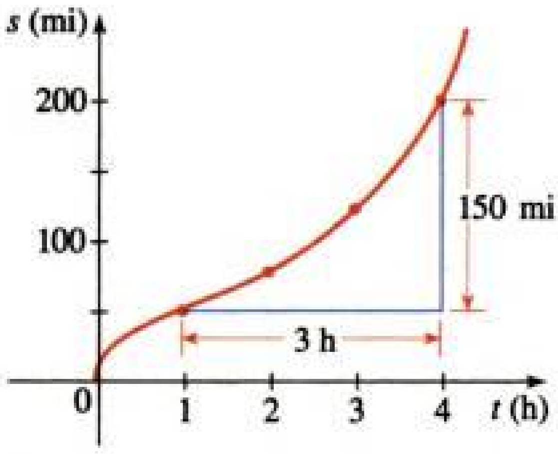


Figura 4
Velocidad promedio

La velocidad promedio recién calculada se puede expresar con notación de función:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{s(4) - s(1)}{4 - 1} = \frac{200 - 50}{3} = 50 \text{ millas/h}$$

Hay que observar que la velocidad promedio es diferente en intervalos de tiempo distintos. Por ejemplo, entre las 2:00 P.M. y 3:00 P.M. se encuentra que

$$\text{velocidad promedio} = \frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = \frac{140 - 75}{1} = 65 \text{ millas/h}$$

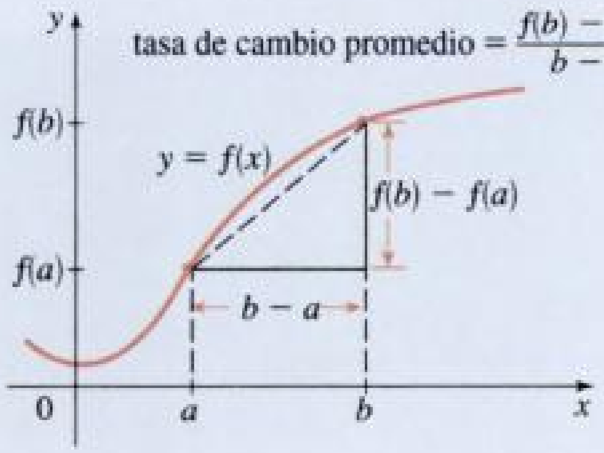
Determinar las tasas de cambio promedio es importante en muchos contextos. Por ejemplo, se puede tener interés en saber qué tan rápido desciende la temperatura del aire cuando se aproxima una tormenta, o qué tan rápido crecen los ingresos por la venta de un nuevo producto. Por lo tanto, se necesita saber cómo determinar la tasa de cambio promedio de funciones que modelan estas cantidades. De hecho, el concepto de tasa de cambio promedio se puede definir para cualquier función.

Tasa de cambio promedio

La **tasa de cambio promedio** de la función $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{tasa de cambio promedio} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La tasa de cambio promedio es la pendiente de la **recta secante** entre $x = a$ y $x = b$ en la gráfica de f, es decir, la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



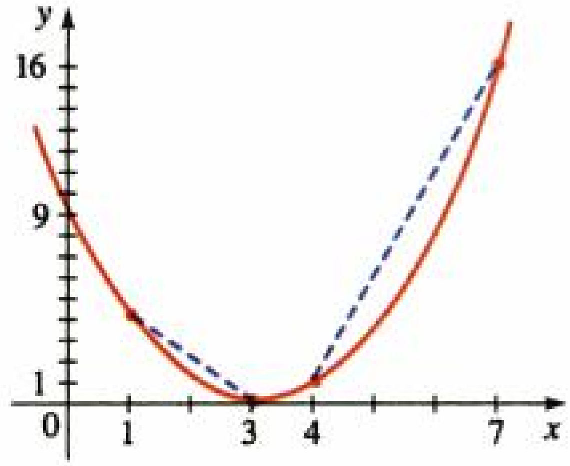


Figura 5
$f(x) = (x - 3)^2$

Ejemplo 3 Cálculo de la tasa de cambio promedio

Para la función $f(x) = (x - 3)^2$, cuya gráfica se muestra en la figura 5, encuentre la tasa de cambio promedio entre los puntos siguientes:

a) $x = 1$ y $x = 3$ b) $x = 4$ y $x = 7$

Solución

a) $$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \quad \text{Definición}$$

$$= \frac{(3-3)^2 - (1-3)^2}{3 - 1} \quad \text{Emplee } f(x) = (x-3)^2$$

$$= \frac{0 - 4}{2} = -2$$

b) $$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{f(7) - f(4)}{7 - 4} \quad \text{Definición}$$

$$= \frac{(7-3)^2 - (4-3)^2}{7 - 4} \quad \text{Emplee } f(x) = (x-3)^2$$

$$= \frac{16 - 1}{3} = 5$$

■

Ejemplo 4 Velocidad promedio de un objeto en descenso

Si se deja caer un objeto desde un edificio alto, entonces la distancia que ha descendido después de t segundos está dada por la función $d(t) = 16t^2$. Encuentre su velocidad promedio (tasa de cambio promedio) en los siguientes intervalos:

a) Entre 1 s y 5 s b) Entre $t = a$ y $t = a + h$

Solución

a) $$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{d(5) - d(1)}{5 - 1} \quad \text{Definición}$$

$$= \frac{16(5)^2 - 16(1)^2}{5 - 1} \quad \text{Emplee } d(t) = 16t^2$$

$$= \frac{400 - 16}{4} = 96 \text{ pies/s}$$

b) $$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{d(a+h) - d(a)}{(a+h) - a} \quad \text{Definición}$$

$$= \frac{16(a+h)^2 - 16(a)^2}{(a+h) - a} \quad \text{Emplee } d(t) = 16t^2$$

$$= \frac{16(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} \quad \text{Desarrolle y factorice 16}$$

$$= \frac{16(2ah + h^2)}{h} \quad \text{Simplifique el numerador}$$

$$= \frac{16h(2a + h)}{h} \quad \text{Factorice } h$$

$$= 16(2a + h) \quad \text{Simplifique}$$

■

La tasa promedio de cambio calculada en el ejemplo 4(b) se conoce como *cociente de diferencias*. En cálculo se emplean los cocientes de diferencias para calcular las tasas de cambio *instantáneas*. Un ejemplo de una tasa de cambio instantánea es la velocidad mostrada en el odómetro de su automóvil. Ésta cambia de un instante al siguiente a medida que cambia la velocidad del automóvil.

Tiempo	Temperatura (°F)
8:00 A.M.	38
9:00 A.M.	40
10:00 A.M.	44
11:00 A.M.	50
12:00 MEDIODÍA	56
1:00 P.M.	62
2:00 P.M.	66
3:00 P.M.	67
4:00 P.M.	64
5:00 P.M.	58
6:00 P.M.	55
7:00 P.M.	51

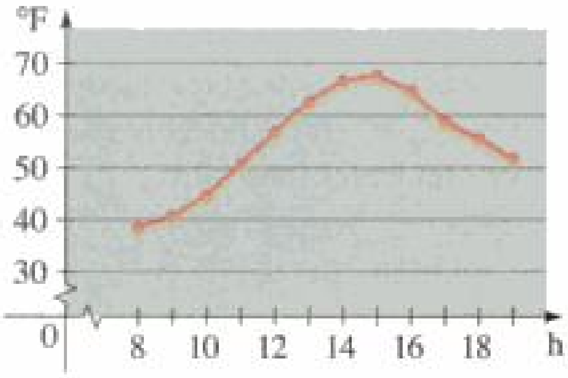


Figura 6

Ejemplo 5 Tasa promedio de cambio de temperatura

En la tabla aparecen las temperaturas externas que un estudiante de ciencias observó en un día de primavera. Trace una gráfica de los datos y determine la tasa promedio de cambio de temperatura entre los siguientes tiempos:

a) 8:00 A.M. y 9:00 A.M.

b) 1:00 P.M. y 3:00 P.M.

c) 4:00 P.M. y 7:00 P.M.

Solución En la figura 6 se muestra una gráfica de los datos de temperatura. Sea t el tiempo, medido en horas desde la medianoche (de modo que las 2:00 P.M., por ejemplo, corresponden $t = 14$). Defina la función F por

$$F(t) = \text{temperatura en el tiempo } t$$

a) $$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{\text{temperatura a las 9 A.M.} - \text{temperatura a las 8 A.M.}}{9 - 8}$$

$$= \frac{F(9) - F(8)}{9 - 8}$$

$$= \frac{40 - 38}{9 - 8} = 2$$

La tasa de cambio promedio fue 2°F por hora.

b) $$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{\text{temperatura a las 3 P.M.} - \text{temperatura a las 1 P.M.}}{15 - 13}$$

$$= \frac{F(15) - F(13)}{15 - 13}$$

$$= \frac{67 - 62}{2} = 2.5$$

La tasa de cambio promedio fue 2.5°F por hora.

c) $$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{\text{temperatura a las 7 P.M.} - \text{temperatura a las 4 P.M.}}{19 - 16}$$

$$= \frac{F(19) - F(16)}{19 - 16}$$

$$= \frac{51 - 64}{3} \approx -4.3$$

La tasa de cambio promedio fue de casi -4.3°F por hora durante este intervalo de tiempo. El signo negativo indica que la temperatura descendió. ■

Matemáticas en el mundo moderno

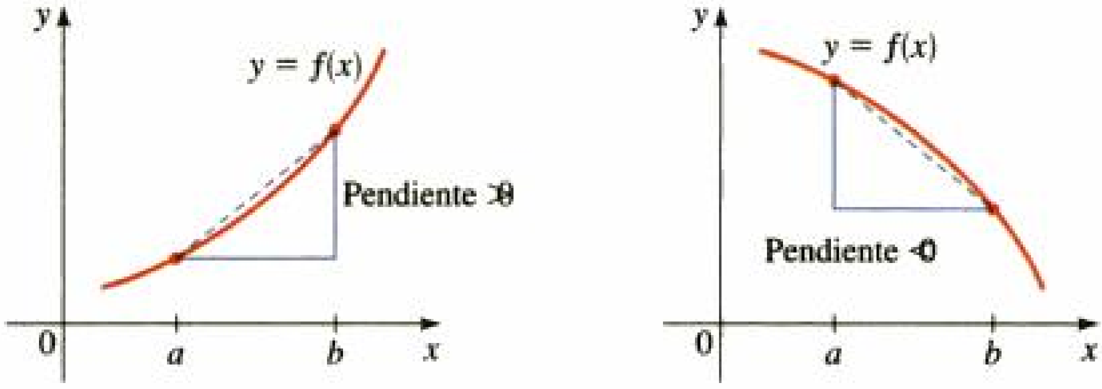
Computadoras

Durante siglos las máquinas han sido diseñadas para efectuar tareas específicas. Por ejemplo, una lavadora lava la ropa, una tejedora teje ropa, una sumadora suma números, etc. La computadora ha cambiado todo eso. La computadora es la máquina que no hace nada, hasta que recibe instrucciones sobre qué hacer. Así, su computadora puede jugar juegos, trazar imágenes o calcular π hasta un millón de cifras decimales; todo depende de qué programa (o instrucciones) le dé a la computadora. La computadora puede hacer todo esto porque puede aceptar y cambiar de manera lógica las instrucciones con base en los datos entrantes. Esta versatilidad hace a las computadoras útiles en casi todo aspecto del esfuerzo humano.

El matemático Allan Turing describió de manera teórica en la década de los cuarentas la idea de una computadora (véase la página 103) en lo que llamó una *máquina universal*. En 1945 el matemático John Von Neumann, ampliando las ideas de Turing, construyó una de las primeras computadoras electrónicas.

Los matemáticos continúan con el desarrollo de nuevas bases teóricas para el diseño de computadoras. El corazón de la computadora es el "chip", que es capaz de procesar instrucciones lógicas. Para tener una idea de la complejidad del chip, considere que el chip Pentium ¡tiene más de 3.5 millones de circuitos lógicos!

Las gráficas de la figura 7 muestran que si una función es creciente en un intervalo, entonces la tasa de cambio promedio entre dos puntos cualesquiera es positiva, mientras que si una función es decreciente en un intervalo, entonces la tasa de cambio promedio entre dos puntos cualesquiera es negativa.



f creciente
Tasa de cambio promedio positiva

f decreciente
Tasa de cambio promedio negativa

Figura 7

Ejemplo 6 Las funciones lineales tienen tasa de cambio constante

Sea $f(x) = 3x - 5$. Determine la tasa de cambio promedio de f entre los puntos siguientes.

a) $x = 0$ y $x = 1$ b) $x = 3$ y $x = 7$ c) $x = a$ y $x = a + h$

¿Qué conclusión puede sacar de sus respuestas?

Solución

a) $$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{(3\cdot 1 - 5) - (3\cdot 0 - 5)}{1}$$
$$= \frac{(-2) - (-5)}{1} = 3$$

b) $$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{(3\cdot 7 - 5) - (3\cdot 3 - 5)}{4}$$
$$= \frac{16 - 4}{4} = 3$$

c) $$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a} = \frac{[3(a + h) - 5] - [3a - 5]}{h}$$
$$= \frac{3a + 3h - 5 - 3a + 5}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

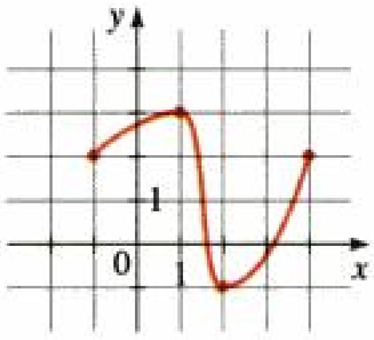
Al parecer la tasa de cambio promedio siempre es 3 para esta función. De hecho, el inciso c) provee la tasa de cambio entre dos puntos arbitrarios $x = a$ y $x = a + h$ es 3. ■

Como indica el ejemplo 6, para una función lineal $f(x) = mx + b$, la tasa de cambio promedio entre dos puntos cualesquiera es la pendiente m de la recta. Esto concuerda con lo aprendido en la sección 1.10, que la pendiente de una recta representa la tasa de cambio de y con respecto a x.

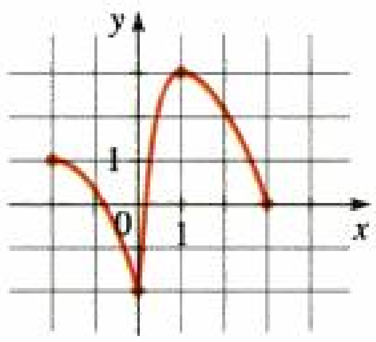
2.3 Ejercicios

1–4 ■ Se da la gráfica de una función. Determine los intervalos en los que la función es a) creciente y b) decreciente.

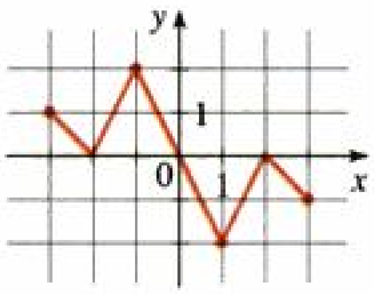
1.



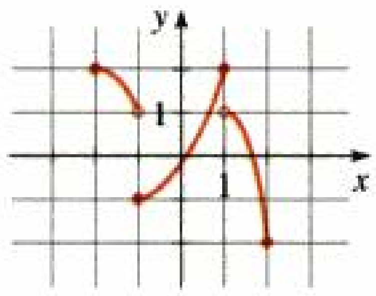
2.



3.



4.



5–12 ■ Se da una función f.

a) Emplee un dispositivo de graficación para trazar la gráfica de f.

b) Exprese de forma aproximada los intervalos en los que f es creciente y en los que f es decreciente.

5. $f(x) = x^{2/5}$

6. $f(x) = 4 - x^{2/3}$

7. $f(x) = x^2 - 5x$

8. $f(x) = x^3 - 4x$

9. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

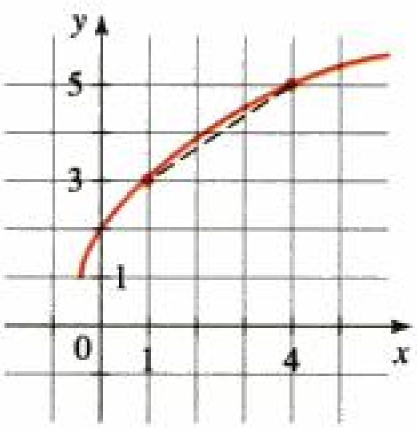
10. $f(x) = x^4 - 16x^2$

11. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

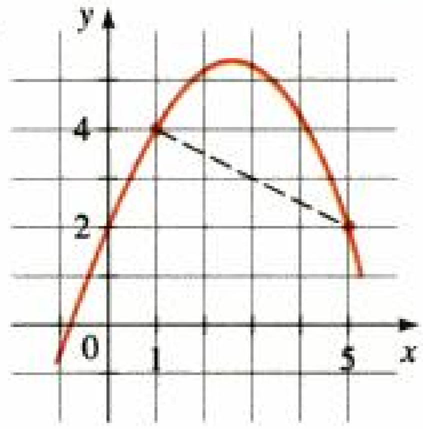
12. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3$

13–16 ■ Se da la gráfica de una función. Determine la tasa de cambio promedio de la función entre los valores indicados de la variable.

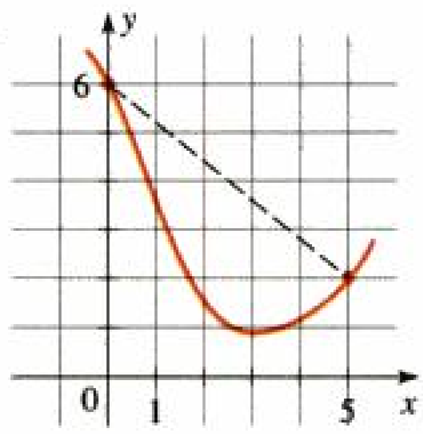
13.



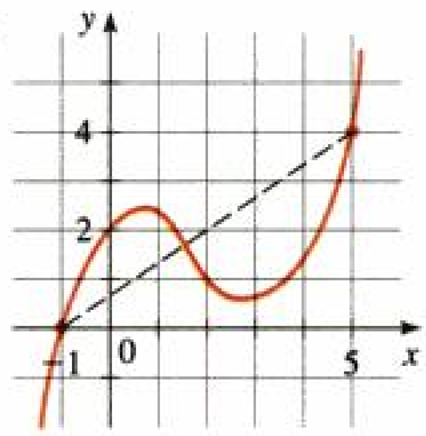
14.



15.



16.



17–28 ■ Dada una función, determine la tasa de cambio promedio de la función entre los valores dados de la variable.

17. $f(x) = 3x - 2; \quad x = 2, x = 3$

18. $g(x) = 5 + \frac{1}{2}x; \quad x = 1, x = 5$

19. $h(t) = t^2 + 2t; \quad t = -1, t = 4$

20. $f(z) = 1 - 3z^2; \quad z = -2, z = 0$

21. $f(x) = x^3 - 4x^2; \quad x = 0, x = 10$

22. $f(x) = x + x^4; \quad x = -1, x = 3$

23. $f(x) = 3x^2; \quad x = 2, x = 2 + h$

24. $f(x) = 4 - x^2; \quad x = 1, x = 1 + h$

25. $g(x) = \dfrac{1}{x}; \quad x = 1, x = a$

26. $g(x) = \dfrac{2}{x+1}; \quad x = 0, x = h$

27. $f(t) = \frac{2}{t}$; $t = a, t = a + h$

28. $f(t) = \sqrt{t}$; $t = a, t = a + h$

29–30 ■ Se da una función lineal.

a) Encuentre la tasa de cambio promedio de la función entre $x = a$ y $x = a + h$.

b) Muestre que la tasa de cambio promedio es la misma que la pendiente de la recta.

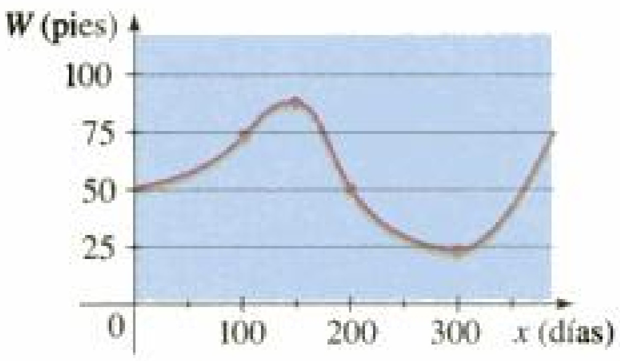
29. $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ **30.** $g(x) = -4x + 2$

Aplicaciones

31. Niveles de agua cambiantes En la gráfica se observa la profundidad del agua W en un depósito en un periodo de un año, como una función del número de días x desde el comienzo del año.

a) Determine los intervalos en los que la función W es creciente y en los que es decreciente.

b) ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de W entre $x = 100$ y $x = 200$?

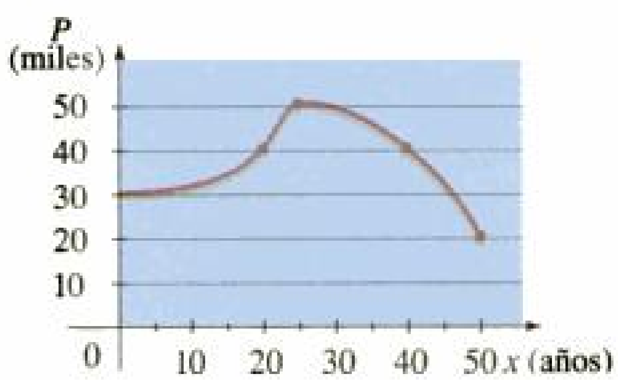


32. Crecimiento y disminución poblacional En la gráfica se muestra la población P en una pequeña ciudad industrial de 1950 a 2000. La variable x representa el número de años desde 1950.

a) Determine los intervalos en los que la función P es creciente y en los que es decreciente.

b) ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de P entre $x = 20$ y $x = 40$?

c) Interprete el valor de la tasa de cambio promedio que encontró en el inciso b).



33. Crecimiento y disminución poblacional En la tabla se da la población en una pequeña comunidad costera para el periodo 1997-2006. Las cifras mostradas son para el primero de enero de cada año.

a) ¿Cuál fue la tasa de cambio promedio de la población entre 1998 y 2001?

b) ¿Cuál fue la tasa de cambio promedio de la población entre 2002 y 2004?

c) ¿Para qué periodo la población fue creciente?

d) ¿Para qué periodo la población fue decreciente?

Año	Población
1997	624
1998	856
1999	1336
2000	1578
2001	1591
2002	1483
2003	994
2004	826
2005	801
2006	745

34. Velocidad de carrera Un hombre corre alrededor de una pista circular de 200 m. Un observador emplea un cronómetro para registrar el tiempo del corredor al final de cada vuelta, y obtiene los datos de la tabla siguiente.

a) ¿Cuál es la velocidad (tasa) promedio del hombre entre 68 s y 152 s?

b) ¿Cuál es la velocidad promedio del hombre entre 263 s y 412 s?

c) Calcule la velocidad del hombre para cada vuelta. ¿Baja su velocidad, aumenta o permanece constante?

Tiempo (s)	Distancia (m)
32	200
68	400
108	600
152	800
203	1000
263	1200
335	1400
412	1600

35. Ventas de reproductor de CD En la tabla se muestra el número de reproductores de CD vendidos en tiendas pequeñas de aparatos electrónicos en los años 1993 a 2003.

(a) ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de ventas entre 1993 y 2003?

b) ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de ventas entre 1993 y 1994?

c) ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de ventas entre 1994 y 1996?

d) ¿Entre qué par de años sucesivos se *incrementaron* con más rapidez las ventas de reproductores de CD, *disminuyeron* con más rapidez?

Año	Reproductores de CD vendidos
1993	512
1994	520
1995	413
1996	410
1997	468
1998	510
1999	590
2000	607
2001	732
2002	612
2003	584

36. Colección de libros Entre 1980 y 2000, un coleccionista de libros raros compra libros para su colección a una tasa de 40 libros por año. Use esta información para completar la tabla siguiente. (Hay que obserar que faltan los datos para algunos años.)

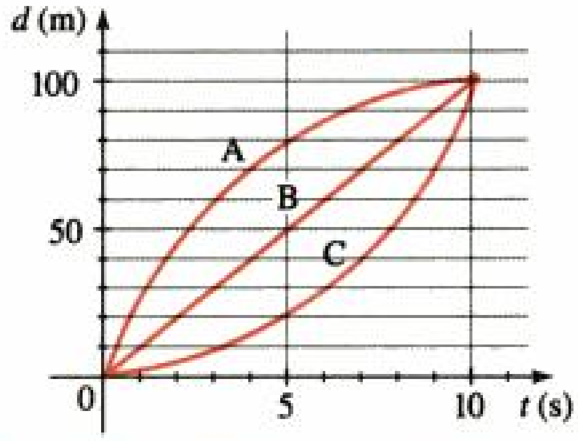
Año	Número de libros
1980	420
1981	460
1982	
1985	
1990	
1992	
1995	
1997	
1998	
1999	
2000	1220

Descubrimiento • Debate

37. Carrera de 100 metros Una carrera de 100 m termina en un empate triple por el primer lugar. En la gráfica se muestra la distancia como una función del tiempo para cada uno de los tres ganadores.

a) Halle la velocidad promedio para cada ganador.

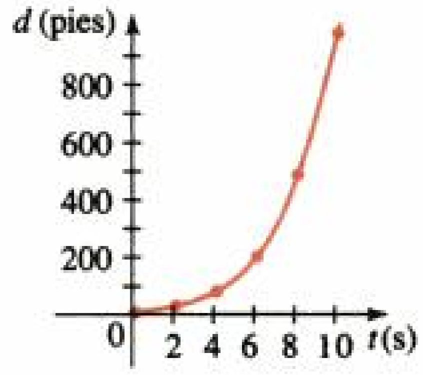
b) Describa las diferencias entre la manera en que los tres corredores corren la competencia.



38. Tasas de cambio variables: concavidad En las dos tablas y gráficas se dan las distancias que recorre un automóvil de carreras durante porciones de 10 s de una competencia. En cada caso, calcule la velocidad promedio a la que viaja el automóvil entre los puntos de datos observados. ¿La velocidad es creciente o decreciente? En otras palabras, ¿el automóvil *acelera* o *desacelera* en cada uno de estos intervalos? ¿Cómo la forma de la gráfica indica si el automóvil acelera o desacelera? (Se dice que la primera gráfica es *cóncava hacia arriba* y la segunda es *cóncava hacia abajo.*)

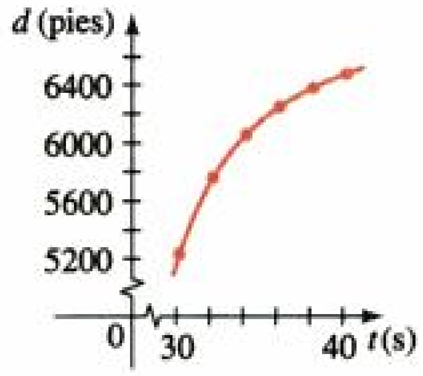
a)

Tiempo (s)	Distancia (pies)
0	0
2	34
4	70
6	196
8	490
10	964



b)

Tiempo (s)	Distancia (pies)
30	5208
32	5734
34	6022
36	6204
38	6352
40	6448



39. Funciones que son siempre crecientes o decrecientes Bosqueje las gráficas aproximadas de funciones que están definidas para los números reales y que exhiben el comportamiento indicado (o explique por qué es imposible el comportamiento).

a) f es creciente siempre y $f(x) > 0$ para toda x

b) f es decreciente siempre y $f(x) > 0$ para toda x

c) f es creciente siempre y $f(x) < 0$ para toda x

d) f es decreciente siempre $f(x) < 0$ para toda x