MATEMÁTICAS BÁSICAS
Clase 3: Exponentes

ELABORÓ MSc. EFRÉN GIRALDO TORO

MEDELLÍN 2015

Exponentes y radicales

Exponentes y radicales

Exponentes y radicales

Objetivos-Competencias

Al finalizar esta clase Ud. debe:

- Dominar el trabajo con exponentes normales y fraccionarios.
- Manejar los radicales y radicales como fraccionarios.

¡Recuerde que esto es básico para las clases siguientes!

Contenidos a estudiar

- Exponentes de expresiones aritméticas y algebraicas
- Radicación

RECOMENDACIÓN IMPORTANTE

- Amigo estudiante:

- Este es el **tercer peldaño** de la escalera de las matemáticas básicas. Si lo entiende y lo estudia bien, no tendrá problemas con su materia. Si no, consulte con sus compañeros, con su profesor o en las asesorías.

¡Saque mínimo 8 horas semanales fuera de clase para estudiar matemáticas. No valen disculpas!.

¡*No deje para mañana lo que tiene que hacer hoy!*

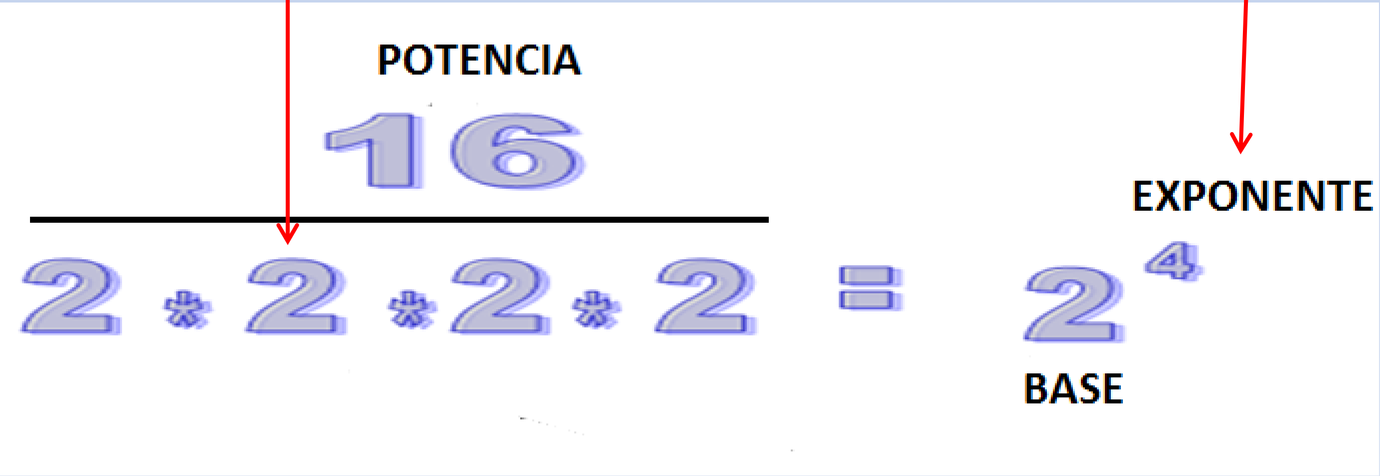
POTENCIAS

Exponentes

- Bibliografía base: Precálculo de Stewar página 12-20 y páginas de internet referenciadas

Potencias

- Una **potencia** es el resultado de multiplicar un número por sí mismo varias veces. El número que multiplicamos se llama **base**, el número de veces que multiplicamos la base se llama **exponente**



(Guara, 2011)

- No obstante algunas veces también se encuentra que potencia es simplemente un exponente:
- a^5 a la potencia 5
- a^5 también se llama potencia

Exponentes

Si n es un entero positivo, la notación exponencial a^n representa el producto del número real a multiplicado n veces por si mismo.

$$a^1 = a$$

$$a^2 = a \cdot a$$

$$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

(Pérez, 2011).

Ejemplos

Ejemplo 1 $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

Ejemplo 2 $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{81}$

Es importante observar que si n es un entero positivo, entonces una expresion $3a^n$

significa $3(a^n)$

pero no ! $(3a)^n$

(Pérez, 2011)

Exponente Cero y Negativo

Definición (a diferente de cero)	Ejemplos
$a^0 = 1$	$(-\sqrt{2})^0 = 1$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$(-3)^{-5} = \dfrac{1}{(-3)^5}$

Cualesquier número a la cero es igual a 1

El inverso de a^n **es** $\dfrac{1}{a^n}$ **que a su vez es** a^{-n}

(Pérez, 2011)

- Cuando tenemos una base con un **exponente negativo** en el numerador , si se quiere pasarla al denominador se puede hacer pero colocándole el exponente positivo a la base y viceversa

- $a^{-n} = 1 / a^{n}$

¡ Ojo ¡

$$2^{-3} = \frac{1}{2^{3}}$$

Es con el signo del exponente no con el signo de la base.

(Guaura, 2011)

Elevar una fracción a un número negativo

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4}$$

Simplemente se invierte la fracción y se deja e l exponente positivo.

Ejemplo 5 **Simplificación de expresiones con exponentes negativos**

Elimine los exponentes negativos y simplifique las expresiones.

a) $\dfrac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^{2}}$

Solución

(a) Usamos la ley 7, la cual permite pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador, o viceversa, cambiando el signo del exponente.

t^{-4} se baja al denominador y se vuelve t^4.

$$\frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^{2}} = \frac{6ss^{2}}{2t^{2}t^{4}} \qquad \text{Ley 7}$$

s^{-2} se sube al numerador y se vuelve s^2.

$$= \frac{3s^{3}}{t^{6}} \qquad \text{Ley 1}$$

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a}_{m \text{ factores de } a} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a}_{n \text{ factores de } a}$$

$5^3 . 5^4$=5.5.5× 5.5.5.5=5^7

(Pérez, 2011)

- A su vez el producto de dos potencias de la misma base con exponentes diferentes, es otra potencia de la misma base cuyo exponente es la suma de los exponentes :

$$\boxed{\mathbf{a}^{m} \,\mathbf{.}\, \mathbf{a}^{n} = \mathbf{a}^{m+n}}$$

$$5^3 . 5^4 = 5^7$$

Leyes de los exponentes

- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
  - $(a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad a \neq 0 \quad m > n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $\quad b \neq 0$
- $a^0 = 1$ $\quad a \neq 0$

(Exponentes y radicales.2011)

Multiplicación de exponentes fraccionarios con misma base:

- $a^{\frac{1}{3}} * a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}$
- Tomo exponentes solos sin la base y los sumo
- $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=$ aplico lo de X o lo del mcm
- $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{5+3}{5*3}=\frac{8}{15}$
- $a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = a^{\frac{8}{15}}$

- $a^{\frac{2}{3}} * a^{-\frac{1}{5}} = a^{\frac{2}{3} - \frac{1}{5}}$
- 1. Tomo exponentes solos sin la base y los sumo o resto.

- $\frac{2}{3} - \frac{1}{5}$= aplico lo de X   o lo del mcm
- $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{10-3}{5*3} = \frac{7}{15}$
- $\frac{7}{15}$
- $a^{\frac{2}{3} - \frac{1}{5}} = a^{\frac{7}{15}}$

Aplicaciones de las leyes de los exponentes : simplificación de expresiones algebraicas

Simplificar: $\left(3x^3y^2\right)\left(4xy^8\right)$

Solución:

$$\left(3x^3y^2\right)\left(4xy^8\right) = (3)(4)(x^3x)(y^2y^8)$$
$$= 12x^4y^{10}$$

(Perez, 2011)

Leyes de los exponentes. Ejercicios

Escribir las siguientes expresiones sin denominador, mediante el uso de exponentes negativos:

$$\frac{2x^2}{y^{-3}}$$

$$\frac{3x^2}{2yz^3}$$

$$\frac{xy^{-2}}{x^2y^{-3}w^0}$$

$$\frac{2x^0y}{a^{-2}x^{-1}y^{-3}}$$

(Exponentes y radicales.2011

Simplificar: $\left(3x^3y^2\right)\left(4xy^8\right)$

Simplificar: $\boxed{\left(\dfrac{2t^2}{p}\right)^3\left(\dfrac{p}{t^5}\right)^2}$

(Perez, 2011)

$$a^0 = 1 \qquad a \neq 0$$

$$0^0 = 0^{n-n} = 0^n 0^{-n} = \frac{0^n}{0^n} = \frac{0}{0}$$

!!!No existe!!!

!!!Es indeterminado!!!

(Exponentes y radicales.2011

Simplifíquense las expresiones siguientes expresando los resultados sin exponentes negativos y sin exponente cero.

$$-4\left(x-3\right)^{-3}\left(x+2\right)^{-5}-3\left(x-3\right)^{-4}\left(x+2\right)^{-4}$$

$$3\left(2x+3\right)^{-1}\left(3x-2\right)^{-2}+2\left(2x+3\right)^{-2}\left(3x-2\right)^{-1}$$

(Exponentes y radicales.2011)

RADICACIÓN

La radicación es la operación inversa de la potenciación, se representa con el símbolo **√**

Toda la expresión que se ubica dentro del símbolo de raíz es llamada cantidad subradical o radicando, y el número que se ubica arriba y a la izquierda de la raíz es llamado el índice o grado del radical

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

Base

Índice o exponente del radical

$$a^{q/p} = \sqrt[p]{a^q}$$

Exponente de la cantidad subrradical

Exponentes racionales

Para definir lo que queremos decir con *exponente racional* o, lo que es lo mismo, *exponente fraccionario* como $a^{1/3}$, necesitamos usar los radicales. Con objeto de dar significado al símbolo $a^{1/n}$ de manera que sea consistente con las Leyes de los exponentes, tendríamos que tener

$$(a^{1/n})^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

Entonces, según la definición de raíz *n*-ésima,

$$\boxed{a^{1/n} = \sqrt[n]{a}}$$

(Stewart,2007)

- Tomémolo para $\sqrt{a}$. Significa raíz cuadrada de a, o lo que es lo mismo $\sqrt[2]{a}$ = $a^{1/2}$

Para a≥0

- O sea que para la raíz cuadrada no se requiere colocar el índice 2 en el radical. Y se puede expresar con un exponte fraccionario.

- Si $\sqrt{a}$ = b $\qquad a^{1/2}$ = b $\qquad (a^{1/2})^2 = b^2 \qquad a^{2/2} = a = b^2$

- Al elevar ambos lados al cuadrado.

(Al elevar un radical al cuadrado destruyo el radical)

- Por tanto $\sqrt{a}$ = b <u>**significa o es lo mismo que**</u> $a = b^2$

- Por lo tanto para destruir el radical $\sqrt{a}$ = b sencillamente elevo al cuadrado ambos lados. *a* sale afuera, tal cual está adentro del radical y b queda al cuadrado. a =b^2

Es muy importante notar también que *a no puede ser negativo (a≥0).* Porque si *a* fuera negativo $\sqrt{a}$ *no sería número real sino imaginario.*

De la misma manera para la raíz n-ésina de a

$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

Note que el subíndice del radical va al denominador del exponente de a

$$Si \quad \sqrt[n]{a} = b \; entonces \quad a^{1/n} = b$$

Si elevo a la n ambos lados $(a^{1/n})^n = a^{n/n} = a = b^n$

Entonces $\sqrt[n]{a} = \mathrm{b}$ es lo mismo que $\mathrm{a} = b^n$

$\sqrt[4]{81} = 3$ porque $3^4 = 81$ y $3 \geq 0$

$\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = -8$

(Stewart,2007)

Propiedades de las raíces *n*-ésimas

Propiedad	Ejemplo
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{2}{3}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5, \quad \sqrt[5]{2^5} = 2$
5. $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = \lvert -3 \rvert = 3$

- La mejor manera de trabajar operaciones con radicales es reduciéndolos a exponentes fraccionarios y trabajarlos como tales

Ejemplo 10 **Uso de la definición de los exponentes racionales**

a) $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$

b) $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ Otra solución: $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

c) $125^{-1/3} = \dfrac{1}{125^{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{1}{5}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \dfrac{1}{x^{4/3}} = x^{-4/3}$

Ejemplo 11 Uso de las Leyes de los exponentes con exponentes racionales

a) $a^{1/3}a^{7/3} = a^{8/3}$ Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

b) $\dfrac{a^{2/5}a^{7/5}}{a^{3/5}} = a^{2/5+7/5-3/5} = a^{6/5}$ Ley 1, Ley 2: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

c) $(2a^3b^4)^{3/2} = 2^{3/2}(a^3)^{3/2}(b^4)^{3/2}$ Ley 4: $(abc)^n = a^n b^n c^n$

$= (\sqrt{2})^3 a^{3(3/2)} b^{4(3/2)}$ Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$

$= 2\sqrt{2}a^{9/2}b^6$

d) $\left(\dfrac{2x^{3/4}}{y^{1/3}}\right)^3\left(\dfrac{y^4}{x^{-1/2}}\right) = \dfrac{2^3(x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3}\cdot(y^4x^{1/2})$ Leyes 5, 4 y 7

$= \dfrac{8x^{9/4}}{y}\cdot y^4x^{1/2}$ Ley 3

$= 8x^{11/4}y^3$ Leyes 1 y 2

Radicales

Si n es un entero positivo mayor de 1 y a es un número real , la raíz enésima de a se define como:

$$\sqrt[n]{a}$$

donde n es el índice del radical y el número a se denomina radicando

1) Si $a = 0$, entonces $\sqrt[n]{a} = 0$

2) Si $a \succ 0$, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real **positivo** b tal que $b^n = a$

3) Si $a \prec 0$ y n es non, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real **negativo** b tal que $b^n = a$

4) Si $a \prec 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es un número real

(Pérez, 2011)

Ejemplos:

$$\sqrt{16} = 4 \quad \text{porque} \quad 4^2 = 16$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2} \quad \text{porque} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{porque} \quad (-2)^3 = -8$$

$$\sqrt[4]{-16} \quad \text{no es un número real}$$

- LUEGO DE ESTA TERCERA **CLASE** UD. AMIGO ESTUDIANTE, **TIENE QUE DOMINAR** TODOS LOS CONCEPTOS PROFUNDAMENTE DE LA 1,2 Y 3 CLASE. DE LO CONTRARIO VUELVA REPASE, ESTUDIE, CONSULTE,REÚNASE, INVESTIGUE. HAGA ALGO.

- **SI NO LO HACE TIENE PROBLEMAS EN SU MATERIA Y ESTÁ DANDO OTRO PASO PARA PERDERLA Y POSIBLEMENTE PERDER TAMBIÉN SU CARRERA Y HASTA ARRUINAR SU VIDA.**

TRABAJO EN CASA

- Estudiar Stewart Sección 1.2 páginas 12 a 20
- Volver hacer los ejercicios hechos en clase y los resueltos de Stewart.
- Hacer ejercicios 1.2 página 21 de Stewar
- Lectura previa a clase 4 páginas 24 a 27 Stewart

BIBLIOGRAFÍA

- Exponentes y radicales. 2011. Tomado el 6 agosto d e 2011 de:

http://www.google.com.co/#hl=es&xhr=t&q=exponentes+PPT&cp=14&pq=exponentes&pf=p&sclient=psy&rlz=1R2RNRN_esCO432&source=hp&aq=0v&aqi=g-v1&aql=&oq=exponentes+PPT&pbx=1&fp=9c761940aeac1121&biw=1024&bih=561

- Pérez, Ernesto S -Cisneros. 2011. Curso de Matemáticas Preuniversitarias. Tomado el 6 de agosto de 2011 de : http://www.quimica.izt.uam.mx/CursosComp/ExpyRad.pps

- Guaura, R. y Ramírez, J.(2011). Tomado el 6 agosto 2011 de:

http://www.google.com.co/#hl=es&xhr=t&q=exponentes+PPT&cp=14&pq=exponentes&pf=p&sclient=psy&rlz=1R2RNRN_esCO432&source=hp&aq=0v&aqi=g-v1&aql=&oq=exponentes+PPT&pbx=1&fp=9c761940aeac1121&biw=1024&bih=561.

Steawrt. (2007). Precálculo