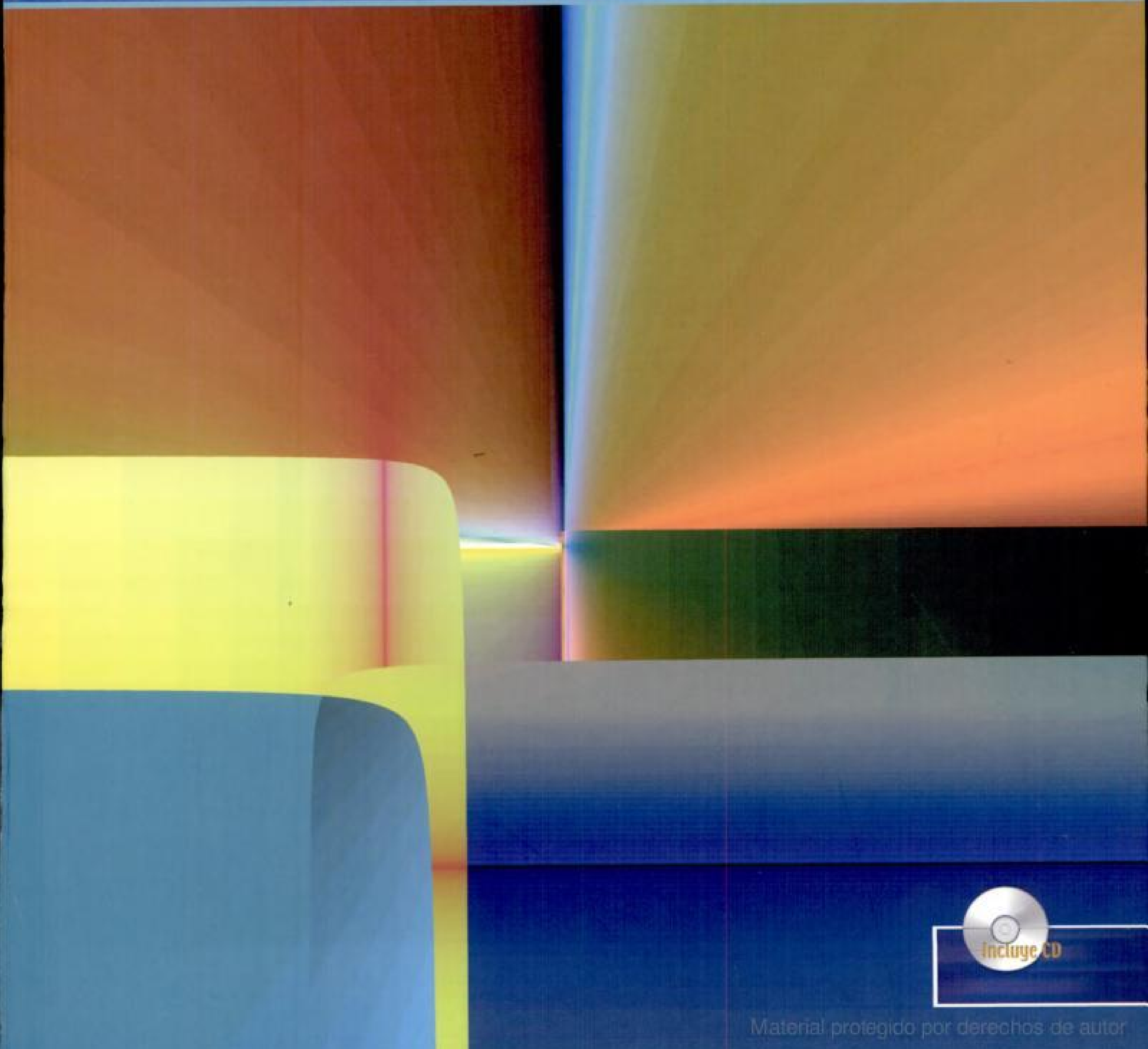
CENGAGE
Learning

James Stewart ▪ Lothar Redlin ▪ Saleem Watson

Precálculo

QUINTA EDICIÓN

Matemáticas para el cálculo



Contenido

1 Fundamentos 1

2 Funciones 146

3 Funciones polinomiales y racionales 248

4 Funciones exponenciales y logarítmicas 326

5 Funciones trigonométricas de números reales 398

6 Funciones trigonométricas de ángulos 466

7 Trigonometría analítica 526

11 Sucesiones y series 820

12 Límites: presentación preliminar de cálculo 880

Prefacio

> El arte de enseñar es el arte de ayudar a descubrir.
> *MARK VAN DOREN*

¿Qué es lo que los estudiantes realmente necesitan saber antes de estudiar cálculo? ¿Con qué herramientas deben contar los maestros para ayudar a sus alumnos a prepararse para el cálculo? Estas dos preguntas son el motivo por el cual hemos escrito este libro.

Para estar preparado para el cálculo, el estudiante requiere no sólo habilidad técnica, sino también entender con claridad los conceptos. De hecho, la *comprensión conceptual* y la *habilidad técnica* van de la mano, y se refuerzan entre sí. Un estudiante también necesita poder apreciar la fuerza y la utilidad de las matemáticas para *modelar* el mundo real. Todas las características de este libro de texto están enfocadas para lograr estas metas.

Estamos convencidos de que la buena enseñanza llega de maneras muy diferentes, y que cada maestro aporta brío e imaginación únicos en el salón de clases. Algunos maestros se apoyan en la *tecnología* para ayudar a que los estudiantes aprendan en forma activa; otros aplican *la regla del cuatro*: "los temas se tienen que presentar en forma geométrica, numérica, algebraica y verbal" para impulsar el razonamiento conceptual; unos más hacen gran énfasis en las *aplicaciones* para hacer que se aprecie la presencia de las matemáticas en la vida diaria. Hay otros que recurren al *aprendizaje en grupo, proyectos ampliados* o *ejercicios de escritura* como una forma de animar a los alumnos a explorar su propia comprensión de un concepto dado, y todas las matemáticas presentes como un esfuerzo para *resolver un problema.* En este libro hemos incluido todos estos métodos para enseñar los conceptos preliminares del cálculo con el fin de mejorar el eje de las habilidades fundamentales. Estos métodos son herramientas que pueden utilizar los profesores y sus alumnos para trazar su propio curso de acción en la preparación para el cálculo.

Al escribir esta quinta edición nuestro objetivo era mejorar aún más la utilidad del libro como herramienta de instrucción. El cambio principal de esta edición es un mayor énfasis en el modelado y las aplicaciones: en cada sección se han ampliado los ejercicios de aplicación y se agrupan todos bajo el encabezado de *Aplicaciones*, y todos los capítulos, excepto el 1, finalizan con una sección llamada *Enfoque en el modelado*. También hemos efectuado algunos cambios en la organización del material, como la división del capítulo sobre trigonometría analítica en dos capítulos, cada uno de un tamaño más accesible. Hay numerosos cambios pequeños: a medida que trabajábamos en el libro nos dábamos cuenta que hacía falta un ejemplo, o que se debía ampliar una explicación, o que quedaría mejor una sección con tipos diferentes de ejercicios. Sin embargo, en todos estos cambios hemos conservado la estructura y las características principales que han contribuido al éxito del libro.

Muchos de los cambios de esta edición tuvieron origen en nuestra propia experiencia en la enseñanza, pero lo más importante es que hemos escuchado con mucha atención a quienes han usado este libro, entre ellos, a muchos de nuestros colegas más cercanos. Agradecemos la gran cantidad de cartas y de mensajes electrónicos que hemos recibido de maestros y de estudiantes, en los que nos recomendaban cambios o sugerían adiciones. Muchos de ellos nos ayudaron enormemente a hacer que esta edición sea más accesible para el estudiante.

Características especiales

GRUPOS DE EJERCICIOS La manera más importante de reforzar el entendimiento de los conceptos y perfeccionar la habilidad técnica se da mediante los problemas que asigna el maestro. Con este fin proporcionamos una amplia variedad de ejercicios.

- **Ejercicios** Cada grupo de ejercicios está cuidadosamente clasificado según el grado de dificultad, desde los ejercicios conceptuales básicos y los problemas para el desarrollo de las habilidades, hasta los problemas más capciosos que requieren sintetizar el material que se aprendió anteriormente junto con nuevos conceptos.
- **Ejercicios de aplicación** Están incluidos problemas aplicados reales que, según nuestra opinión, captarán la atención de los estudiantes. Están incorporados en todo el libro tanto en los ejemplos como en los ejercicios. En los grupos de ejercicios, los problemas aplicados están reunidos bajo el encabezado de *Aplicaciones*.
- **Descubrimientos, escritura y aprendizaje en grupo** Cada uno de los grupos de ejercicios finaliza con un conjunto de ejercicios llamado *Descubrimiento • Debate*. Éstos se diseñaron para estimular al estudiante a experimentar, de preferencia en grupos, con los conceptos analizados en la sección, y luego a escribir lo que aprendieron, en lugar de simplemente a buscar "la respuesta".

UN CAPÍTULO DE REPASO COMPLETO Se incluye un capítulo de repaso a fin de que el estudiante repase los conceptos básicos de álgebra y geometría analítica y a su vez los tenga siempre a la mano.

- **Capítulo 1** Es un capítulo de repaso; contiene los conceptos fundamentales que el estudiante requiere para iniciar un curso sobre los temas preliminares del cálculo. Lo mucho o lo poco que este capítulo sea cubierto en clase depende de los elementos con que cuenten los alumnos.
- **Examen del capítulo 1** Se pretende que la prueba que se encuentra al finalizar el capítulo 1 sea un diagnóstico para determinar qué partes de este capítulo de repaso es necesario retomar. También ayuda al estudiante a evaluar con exactitud qué temas necesita repasar.

ENFOQUE FLEXIBLE DE TRIGONOMETRÍA Los capítulos sobre trigonometría están escritos de modo que se pueda abordar primero el enfoque del triángulo rectángulo o el del círculo unitario. Al colocar estos dos enfoques en distintos capítulos, cada cual con sus aplicaciones pertinentes, ayudamos a dilucidar el objetivo de cada método. Los capítulos introductorios a la trigonometría son los siguientes:

- **Capítulo 5: Funciones trigonométricas de números reales** Presenta la trigonometría por medio del método del círculo unitario. Este enfoque destaca que las funciones trigonométricas son funciones de números reales, justo como las funciones polinomiales y exponenciales con las cuales los estudiantes ya están familiarizados.

- **Capítulo 6: Funciones trigonométricas de los ángulos.** Aquí se presenta la trigonometría por medio del enfoque del triángulo rectángulo. Este método se basa en los principios de un curso ordinario de trigonometría para bachillerato.

Otra manera de enseñar trigonometría es entrelazar los dos métodos. Algunos maestros enseñan este material en el siguiente orden: secciones 5.1, 5.2, 6.1, 6.2, 6.3, 5.3, 5.4, 6.4, 6.5. La organización facilita hacerlo sin ocultar el hecho de que los dos métodos requieren distintas representaciones de las mismas funciones.

CALCULADORAS GRAFICADORAS Y COMPUTADORAS El avance tecnológico que se ha dado en calculadoras y computadoras amplía de manera impresionante nuestra capacidad para calcular y representar las matemáticas. La disponibilidad de calculadoras graficadoras no les resta importancia, lo más importante es entender los conceptos en los que se basan las calculadoras. Así, todas las subsecciones en las que se requiere el uso de las calculadoras están precedidas por secciones en las cuales los estudiantes tienen que graficar o calcular a mano, de modo que puedan entender exactamente lo que la calculadora hace cuando más tarde la utilicen para simplificar la rutina. Las secciones, subsecciones, ejemplos y ejercicios para calculadora que están señaladas con el símbolo 📈 son optativas y se podrían omitir sin que haya pérdida de continuidad. Se utilizan las siguientes capacidades de la calculadora:

- **Calculadoras graficadoras** El uso de este tipo de calculadora está incorporado en todo el libro para graficar y analizar funciones y sucesiones, para calcular y graficar curvas de regresión, operar con álgebra matricial, graficar desigualdades lineales y otros usos importantes.
- **Programas sencillos** Aprovechamos las capacidades de programación de la calculadora para simular situaciones de la vida cotidiana, sumar series o calcular los términos de una sucesión recursiva.

ENFOQUE EN EL MODELADO El tema del modelado se usa en todo el libro para uniformar y aclarar las diversas aplicaciones de los conceptos preliminares del cálculo. En estas secciones y subsecciones de modelado realizamos un esfuerzo especial para aclarar el proceso esencial de pasar los enunciados de los problemas al lenguaje matemático.

- **Modelos de construcción** Hay numerosos problemas aplicados en los cuales se proporciona al alumno un modelo para que lo analice. Pero el material sobre modelado, donde a los estudiantes se les pide que *construyan* modelos matemáticos está organizado en secciones y subsecciones muy bien definidas.
- **Enfoque en el modelado** Todos los capítulos terminan con una sección de *Enfoque en el modelado*. La primera de dichas secciones, después del capítulo 2, presenta la idea básica de modelar una situación de la vida cotidiana mediante el ajuste de rectas a datos (regresión lineal). Otras secciones presentan formas en las que funciones polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas y sistemas de desigualdades se pueden utilizar para modelar fenómenos conocidos a partir de las ciencias y de la vida diaria. El capítulo 1 concluye con una sección que se llama *Enfoque en la resolución de problemas*.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO Una manera de hacer participar a los estudiantes y volverlos alumnos activos es hacerlos que trabajen, quizá en grupos, en proyectos extensos que los hagan sentir que logran algo importante cuando los terminan. Cada capítulo contiene uno o más *Proyectos para un descubrimiento* (véase el contenido). Estas secciones proporcionan un conjunto de actividades desafiantes pero accesibles que permiten que los estudiantes exploren con mayores detalles un aspecto interesante del tema que acaban de aprender.

HISTORIAS MATEMÁTICAS Aprovechamos los márgenes para presentar notas históricas, reflexiones clave o aplicaciones de las matemáticas en el mundo moderno. Todo esto sirve para mostrar que las matemáticas son una actividad importante y vital, y que hasta en este nivel básico es fundamental para la vida cotidiana.

- **Historias matemáticas** Estas descripciones comprenden biografías de matemáticos importantes y a veces sobre un punto clave que el matemático descubrió y que es importante para este curso.
- **Matemáticas en el mundo moderno** Es una serie de viñetas que destacan el papel importante de las matemáticas en los logros técnicos y científicos actuales.

REVISE SU RESPUESTA Es una sección que destaca el papel importante de esta ciencia en los logros técnicos y científicos actuales.

SECCIONES DE REPASO Y PRUEBAS DE LOS CAPÍTULOS Cada capítulo finaliza con una amplia sección de repaso, incluso una *Evaluación del capítulo* diseñada para que el estudiante mida su avance. En la parte final del libro se proporcionan respuestas breves de los ejercicios con número impar de todas las secciones, incluso la de los ejercicios de repaso, y las respuestas a todas las preguntas de las evaluaciones de los capítulos.

El material de repaso de cada capítulo inicia con una *Revisión de conceptos*, diseñada para motivar al estudiante a que piense y explique con sus propias palabras las ideas que se presentan en el capítulo. Se pueden usar como ejercicios de escritura, en una discusión en el salón de clases o para estudiar en forma individual.

Principales cambios de la quinta edición

- Más del 20% de los ejercicios es nuevo y se seleccionó para proporcionar más práctica con conceptos básicos, así como para explorar ideas que no pudimos tratar en el texto ni en los ejemplos por falta de espacio. Se añadieron muchos nuevos ejercicios aplicados.
- Cada capítulo inicia con un *Esquema del capítulo* que presenta los temas principales del capítulo y explica la razón de la importancia del material.
- Se añadieron seis nuevas secciones de *Enfoque en el modelado*, y los temas van desde mapas del mundo (capítulo 8) hasta ondas viajeras y ondas estacionarias (capítulo 7).
- Se añadieron cinco nuevos *Proyectos para un descubrimiento*, y los temas van desde el uso de vectores en la navegación, hasta el uso de cónicas en la arquitectura.
- Se agregaron más historias matemáticas.
- Quitamos la sección sobre variación del capítulo 2 y la pasamos al capítulo 1, con lo que se logra que el capítulo 2 se enfoque más claramente en los conceptos esenciales de una función.
- En el capítulo 5, *Funciones trigonométricas de los números reales*, incorporamos el material del movimiento armónico como una sección nueva. La sección de *Enfoque en el modelado* trata ahora sobre ajuste de curvas sinusoidales a los datos.

- En el capítulo 7, *Trigonometría analítica*, incluimos sólo el material sobre identidades y ecuaciones trigonométricas. Hicimos este cambio a petición de los lectores.
- El capítulo 8, *Coordenadas polares y vectores* es nuevo. En él se encuentra material que estaba antes en otros capítulos. Los temas de este capítulo, que abarcan también la representación polar de números complejos, se unifican mediante el tema del uso de las funciones trigonométricas para ubicar las coordenadas de un punto o describir las componentes de un vector.
- En el capítulo 9, *Sistemas de ecuaciones y desigualdades*, la sección sobre las gráficas de desigualdades ahora es la última sección, de modo que ahora precede inmediatamente el material sobre programación lineal en la sección *Enfoque en el modelado*.
- El capítulo 10, *Geometría analítica*, comprende ahora sólo la sección que trata de las cónicas y ecuaciones paramétricas. El material sobre las coordenadas polares está ahora en el nuevo capítulo 8.
- El capítulo 11, *Sucesiones y series* contiene ahora más material sobre sucesiones recursivas, puesto que se añadió una sección sobre *Enfoque en el modelado* que trata acerca del uso de dichas sucesiones al modelar fenómenos cotidianos.

Complementos

Este libro cuenta con una serie de recursos para el profesor, los cuales están disponibles en inglés y sólo se proporcionan a los docentes que lo adopten como texto en sus cursos. Para mayor información, póngase en contacto con el área de servicio a clientes en las siguientes direcciones de correo electrónico:

Cengage Learning México y Centroamérica	clientes.mexicoca@cengage.com
Cengage Learning Caribe	clientes.caribe@cengage.com
Cengage Learning Cono Sur	clientes.conosur@cengage.com
Cengage Learning Paraninfo	clientes.paraninfo@cengage.com
Cengage Learning Pacto Andino	clientes.pactoandino@cengage.com

Existe una versión en español de todas las respuestas a los ejercicios y problemas. Se encuentra en el sitio de Cengage Learning http://latinoamerica.cengage.com/stewart. El acceso a este material es mediante una clave especialmente asignada al profesor que adopte este libro como texto.

CD incluido

Con este libro se incluye un CD con el recurso para el estudiante Interactive Video Skillbuilder, el cual contiene horas de clases en video. Lo problemas trabajados durante cada video se muestran a un lado de la pantalla, a fin de que el estudiante los vaya resolviendo antes de ver la solución. También se incluyen tutoriales, cuestionarios, tareas y otros apoyos.

El símbolo 💻 señala qué temas tienen ejemplos adicionales y explicaciones en el CD.

Agradecimientos

Tenemos una deuda de gratitud con los siguientes revisores por sus comentarios cuidadosos y constructivos.

REVISORES DE LA CUARTA EDICIÓN Michelle Benedict, Augusta State University; Linda Crawford, Augusta State University; Vivian G. Kostyk, Inver Hills Community College y Heather C. McGilvray, Seattle University.

REVISORES DE LA QUINTA EDICIÓN Kenneth Berg, University of Maryland; Elizabeth Bowman, University of Alabama en Huntsville; William Cherry, University of North Texas; Barbara Cortzen, DePaul University; Gerry Fitch, Louisiana State University; Lana Grishchenko, Cal Poly State University, San Luis Obispo; Bryce Jenkins, Cal Poly State University, San Luis Obispo; Margaret Mary Jones, Rutgers University; Victoria Kauffman, University of New Mexico; Sharon Keener, Georgia Perimeter College; YongHee Kim-Park, California State University en Long Beach; Mangala Kothari, Rutgers University; Andre Mathurin, Bellarmine College Prep; Donald Robertson, Olympic College; Jude Socrates, Pasadena City College; Enefiok Umana, Georgia Perimeter College; Michele Wallace, Washington State University, y Linda Waymire, Daytona Beach Community College.

Nos hemos beneficiado mucho de las recomendaciones y los comentarios de nuestros colegas, quienes se han apoyado en ediciones anteriores de nuestros libros. Hacemos extensivo el agradecimiento especial a Linda Byun, Bruce Chaderjian, David Gau, Daniel Hernández, YongHee Kim-Park, Daniel Martínez, David McKay, Robert Mena, Kent Merryfield, Florence Newberger, Viet Ngo, Marilyn Oba, Alan Safer, Angelo Segalla, Robert Valentini y a Derming Wang, de California State University, Long Beach; a Karen Gold, Betsy Gensamer, Cecilia McVoy, Mike McVoy, Samir Ouzomgi y Ralph Rush de The Pennsylvania State University, Abington College; a Gloria Dion, de Educational Testing Service, Princeton, New Jersey; a Mark Ashbaugh y Nakhlé Asmar de la University of Missouri, Columbia; a Fred Safier, del City College de San Francisco, y Steve Edwards, de la Southern Polytechnic State University en Marietta, Georgia. También recibimos muchos consejos valiosos de nuestros alumnos, en especial de Devaki Shah y Ellen Newman.

Damos las gracias en forma particular a Martha Emry, gerente de producción, por su excelente trabajo y su atención incansable a la calidad y al detalle. Su energía, dedicación, experiencia e inteligencia fueron puntos esenciales en la eleboración de este libro. También estamos muy agradecidos con Luana Richards, correctora de estilo, quien a través de los años ha moldeado el lenguaje y el estilo de todos nuestros libros. Agradecemos a Jade Meyers de Matrix Art Services por sus ingeniosas figuras. Agradecemos al equipo de G & S Book Services por su alta calidad y sistematización en la composición de las páginas. Gracias especialmente a Phyllis Panman-Watson por su dedicación y cuidado al generar la sección de respuestas. Nuestro agradecimiento al equipo de Brooks/Cole: Stacy Green, asistente del editor; Katherine Cook, asistente editorial; Karin Sandberg, gerente de comercialización; Jennifer Velásquez, asistente de comercialización; Bryan Vann, gerente comercial y de comunicaciones del proyecto; Janet Hill, gerente general de producción del proyecto; Vernon Boes, director general de arte, y Earl Perry, gerente de tecnología del proyecto.

Agradecemos muy en particular al editor Bob Pirtle por dirigir este libro a través de las etapas de escritura y producción. Su apoyo y su experiencia editorial fueron invaluables en el momento de tomar decisiones cruciales.

Al estudiante

Este libro fue escrito a fin de que lo use como guía para conocer a fondo las matemáticas previas al cálculo. En seguida se presentan algunas recomendaciones para ayudarle a aprovechar al máximo este curso.

Primero debe leer la sección adecuada del texto *antes* de intentar resolver los problemas de la tarea. Leer un texto de matemáticas es muy diferente a leer una novela, el periódico o cualquier otro libro. Podría encontrar que debe leer una vez tras otra un párrafo para poder entenderlo. Ponga atención especial a los ejemplos y resuélvalos usted mismo con lápiz y papel mientras los va leyendo. De esta manera será capaz de resolver la tarea con más rapidez y comprensión.

No cometa el error de tratar de memorizar cada regla o hecho que se encuentre. Las matemáticas no son memorización. Las matemáticas son el *arte de resolver problemas*, no sólo una colección de datos. Para conocer a fondo el tema, debe resolver problemas, muchos problemas. Resuelva tantos como pueda. Asegúrese de escribir la solución en una forma lógica, paso por paso. No deseche un problema si no puede resolverlo en ese momento. Trate de entenderlo mejor, vuelva a leerlo con todo cuidado y relaciónelo con lo que ya aprendió de su maestro y de los ejemplos del libro. Luche con él hasta que lo resuelva. Hecho esto unas cuantas veces, empezará a entender de lo que realmente tratan las matemáticas.

Al final del libro aparecen las respuestas a los ejercicios impares y a las evaluaciones de los capítulos. Si su respuesta difiere de la del libro, no suponga de inmediato que usted está mal. Puede haber un cálculo que relacione las dos respuestas y ambas pueden ser correctas. Por ejemplo, si usted llega a $1/(\sqrt{2} - 1)$, pero la respuesta es $1 + \sqrt{2}$, su respuesta *es* correcta porque puede multiplicar tanto el numerador como el denominador de su respuesta por $\sqrt{2} + 1$ para tener la solución dada.

El símbolo ⊘ se utiliza para advertir que no cometa determinado error. Lo hemos colocado al margen para señalar situaciones en las que observamos que muchos estudiantes las repiten.

Calculadoras y cálculos

Las calculadoras son esenciales en la mayor parte de las matemáticas y las ciencias. Nos liberan de ejecutar tareas rutinarias, de modo que podemos concentrarnos con más tranquilidad en los conceptos que estamos estudiando. Las calculadoras son herramientas poderosas, pero se requiere interpretar con cuidado los resultados. A continuación se describen las características que debe tener una calculadora adecuada para un curso de precálculo, y se ofrecen criterios para interpretar los resultados.

Calculadoras científicas y graficadoras

Para este curso usted necesita una calculadora *científica*, es decir, su calculadora debe tener como mínimo las operaciones aritméticas comunes ($+$, $-$, $\times$, $\div$), así como las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas (e^x, 10^x, ln, log, sen, cos, tan). Además, será útil contar con una memoria y por lo menos algún grado de capacidad de ser programada.

Su maestro podría recomendarle que compre una calculadora con la que pueda *elaborar gráficas*. Este libro tiene subsecciones y ejercicios optativos que requieren el uso de una calculadora de este tipo o de una computadora que tenga programas para graficar. Estas subsecciones y ejercicios especiales están señalados mediante el símbolo 📈. Además de graficar funciones, las calculadoras para graficar se pueden usar también para encontrar funciones que modelen datos de la vida cotidiana, resuelvan ecuaciones, ejecuten cálculos con matrices (lo cual se estudia en el capítulo 9) y para que le ayuden a efectuar otras operaciones matemáticas. Todos estos usos se estudian en este libro.

Es importante darse cuenta que debido a su limitada resolución, una calculadora para graficar da sólo una *aproximación* de la gráfica de una función. La calculadora grafica sólo una cantidad finita de puntos y luego los une para formar una *representación* de la gráfica. En la sección 1.9, damos criterios para usar este tipo de calculadoras e interpretar las gráficas que genera.

Cálculos y cifras significativas

La mayor parte de ejemplos y ejercicios aplicados de este libro requiere valores aproximados. Por ejemplo, un ejercicio establece que la Luna mide 1074 millas de radio. Esto no significa que el radio de la Luna sea exactamente de 1074 millas, sino que este es el radio redondeado a la milla más cercana.

Un método simple para especificar la exactitud de un número es establecer cuántas **cifras significativas** tiene. Las cifras significativas de una cantidad son los números desde el primer dígito no cero hasta el último dígito no cero, leyendo de izquierda a derecha. Por consiguiente, 1074 tiene cuatro cifras significativas, 1070 tiene tres, 1100 tiene dos y 1000 tiene una cifra significativa. Esta regla puede originar algunas veces ambigüedades. Por ejemplo, si una distancia es de 200 km al kilómetro más cercano, entonces el número 200 realmente tiene tres cifras significativas, y no sólo una. Esta ambigüedad se evita si se utiliza la notación científica, es decir, si se expresa el número como un múltiplo de una potencia de 10:

$$2.00 \times 10^2$$

Cuando trabajan con valores aproximados, los estudiantes cometen a menudo el error de dar una respuesta final con *más* cifras significativas que los datos originales. Esto es incorrecto porque usted no puede "generar" precisión usando una calculadora. El resultado no puede ser más exacto que las mediciones dadas en el problema. Por ejemplo, suponga que nos han dicho que los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 1.25 y 2.33 pulg. De acuerdo con el Teorema de Pitágoras determinamos mediante una calculadora que la hipotenusa mide

$$\sqrt{1.25^2 + 2.33^2} \approx 2.644125564 \text{ pulg}$$

Pero como las longitudes están expresadas con tres cifras significativas, la respuesta no puede ser más exacta. Por lo tanto, podemos decir sólo que la hipotenusa es de 2.64 pulg, redondeando a la centésima más cercana.

En general, la respuesta final se debe expresar con la misma exactitud que la medición *menos* exacta dada en el enunciado del problema. Las reglas siguientes establecen más precisamente este principio.

Reglas para trabajar con datos aproximados

1. Al multiplicar o dividir, redondee el resultado de modo que tenga tantas *cifras significativas* que el valor dado con la cantidad más baja de cifras significativas.
2. Al sumar o restar, redondee el resultado de modo que su última cifra significativa esté en el *lugar de los decimales* en el cual el valor dado menos exacto tiene su última cifra significativa.
3. Cuando calcule potencias o raíces, redondee el resultado de modo que tenga el mismo número de *cifras significativas* que el valor dado.

Por ejemplo, suponga que el mantel de una mesa rectangular mide 122.64 pulg por 37.3 pulg. El área y el perímetro los expresamos como sigue:

$$\text{Área} = \text{largo} \times \text{ancho} = 122.64 \times 37.3 \approx 4570 \text{ pulg}^2 \qquad \text{Tres cifras significativas}$$

$$\text{Perímetro} = 2(\text{largo} + \text{ancho}) = 2(122.64 + 37.3) \approx 319.9 \text{ pulg} \qquad \text{Dígito de décimos}$$

Observe que en la fórmula del perímetro, el valor 2 es exacto, no una medida aproximada. Por lo tanto, no afecta la exactitud del resultado final. En general, si un problema tiene sólo valores exactos, podríamos expresar la respuesta con tantas cifras significativas como queramos.

Asimismo, note que para hacer el resultado final tan exacto como sea posible, *usted debe esperar hasta el último paso para redondear la respuesta*. Si es necesario use la memoria de la calculadora para conservar los resultados de los pasos intermedios.

Abreviaturas

cm	centímetro
dB	decibel
F	farad
ft	pie
g	gramo
gal	galón
h	hora
H	henry
Hz	Hertz
in.	pulgada
J	Joule
kcal	kilocaloría
kg	kilogramo
km	kilómetro
kPa	kilopascal
L	litro
lb	libra
lm	lumen
M	mol de soluto por litro de solución
m	metro
mg	miligramo
MHz	megahertz
mi	milla
min	minuto
mL	mililitro
mm	milímetro
N	Newton
qt	cuarto de galón
oz	onza
s	segundo
Ω	ohm
V	volt
W	watt
yd	yarda
yr	año
°C	grado Celsius
°F	grado Fahrenheit
K	Kelvin
⇒	entonces
⇔	equivale a

Historias matemáticas

MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

PRECÁLCULO

Matemáticas para el cálculo

QUINTA EDICIÓN

1

Fundamentos

Esquema del capítulo

Este primer capítulo es un repaso de los números reales, ecuaciones y el plano coordenado. Es probable que usted ya esté familiarizado con los conceptos, pero es útil hacer un repaso para ver cómo estas ideas trabajan juntas para resolver problemas y modelar, o describir, situaciones del mundo cotidiano.

Veamos cómo todas estas ideas se usan en la siguiente situación real: suponga que le pagan 8 dólares por hora en su trabajo. Nos interesa saber cuánto dinero gana.

Para describir su salario usamos los *números reales*. En efecto, usamos los números reales todos los días, por ejemplo, para describir cuál es nuestra estatura, cuánto dinero tenemos, qué tanto frío o calor hace, etcétera. En álgebra, expresamos las propiedades de los números reales mediante letras que representan números. Una propiedad importante es la propiedad distributiva:

$$A(B + C) = AB + AC$$

Para encontrar el sentido de esta propiedad, consideremos su salario si trabaja 6 horas un día y 5 horas el siguiente. El salario de los dos días se puede determinar de dos maneras distintas: \$8(6 + 5), o bien, 8 dólares por 6 + 8 dólares por 5, y ambos procedimientos dan la misma respuesta. Ésta y otras propiedades de los números reales constituyen las reglas para trabajar con los números, es decir, son reglas del álgebra.

También podemos modelar el salario para cualquier número de horas mediante una fórmula. Si usted trabaja x horas, entonces su salario es y dólares, donde y se encuentra mediante la fórmula algebraica

$$y = 8x$$

Entonces, si trabaja 10 horas, el salario será $y = 8 \cdot 10$ dólares.

Una *ecuación* es un enunciado escrito en el lenguaje del álgebra que expresa un hecho con respecto a una cantidad desconocida x. Por ejemplo, ¿cuántas horas necesitaría trabajar para obtener 60 dólares? Para responder esta pregunta es necesario resolver la ecuación

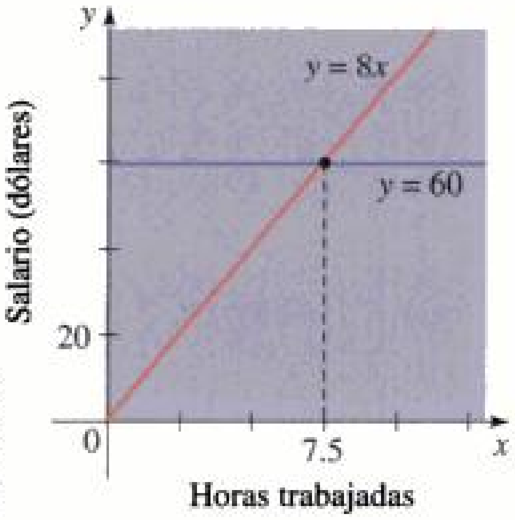
$$60 = 8x$$

Aplicamos las reglas del álgebra para encontrar x. En este caso dividimos ambos miembros de la ecuación entre 8, de modo que $x = \frac{60}{8} = 7.5$ horas.

El *plano coordenado* permite trazar una gráfica de una ecuación de dos variables. Por ejemplo, al graficar la ecuación $y = 8x$ podemos "ver" cómo se incrementa el salario al aumentar las horas trabajadas. Asimismo, podemos resolver gráficamente la ecuación $60 = 8x$ encontrando el valor de x en el cual se cortan las gráficas de $y = 8x$ y $y = 60$ (observe la figura).

En este capítulo hay muchos ejemplos de cómo trabajan juntos los números reales, ecuaciones y plano coordenado para que podamos resolver problemas de la vida real.

Bob Krist/Corbis



1.1 Números reales

Repasemos los tipos de números que constituyen el sistema de los números reales. Empecemos con los **números naturales**:

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Los distintos tipos de números reales se inventaron para cumplir con necesidades específicas. Por ejemplo, los números naturales se necesitan para contar, los números negativos para describir deudas o temperaturas por abajo de cero grados, los números racionales para conceptos como "medio litro de leche", y los números irracionales para medir ciertas distancias como la diagonal de un cuadrado.

Los **enteros** están formados por los números naturales junto con los negativos y el 0:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Construimos los **números racionales** al formar cocientes con los enteros. Por lo tanto, cualquier número racional r se puede expresar como

$$r = \frac{m}{n}$$

donde m y n son enteros y $n \neq 0$. Ejemplos son:

$$\tfrac{1}{2} \qquad -\tfrac{3}{7} \qquad 46 = \tfrac{46}{1} \qquad 0.17 = \tfrac{17}{100}$$

(Recuerde que la división entre cero es imposible, por lo que expresiones como $\frac{3}{0}$ y $\frac{0}{0}$ no están definidas.) También hay números reales, como $\sqrt{2}$, que no pueden ser expresados como un cociente de enteros y, por lo tanto, se llaman **números irracionales**. Se puede demostrar que, con diferentes grados de dificultad, estos números son también irracionales:

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad \frac{3}{\pi^2}$$

El conjunto de todos los números reales se denota mediante el símbolo $\mathbb{R}$. Cuando usamos la palabra *número* sin calificativo, queremos decir "número real". En la figura 1 se ilustra un diagrama de los tipos de números reales con los que trabajamos en este libro.

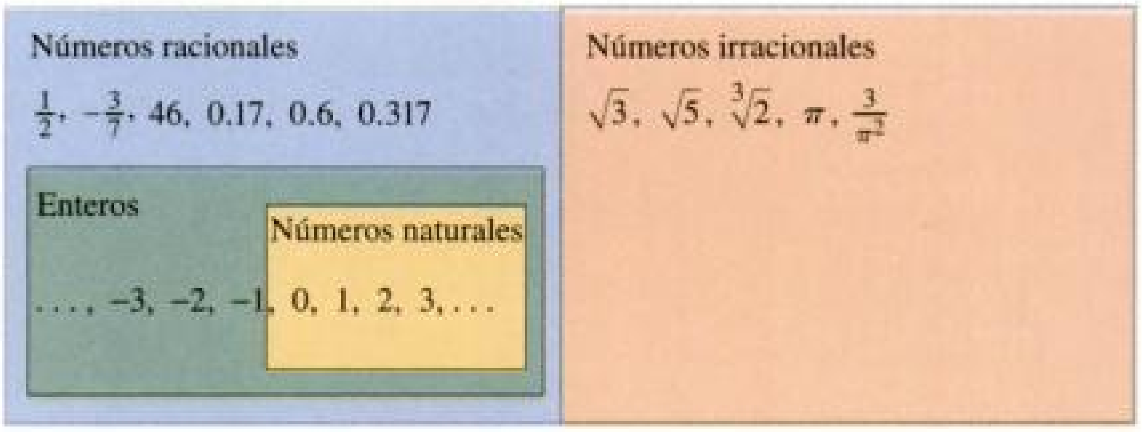


Figura 1

El campo de los números reales

Todos los números reales tienen una representación decimal. Si el número es racional, entonces su decimal correspondiente es periódico. Por ejemplo,

$$\tfrac{1}{2} = 0.5000\ldots = 0.5\overline{0} \qquad \tfrac{2}{3} = 0.66666\ldots = 0.\overline{6}$$

$$\tfrac{157}{495} = 0.3171717\ldots = 0.3\overline{17} \qquad \tfrac{9}{7} = 1.285714285714\ldots = 1.\overline{285714}$$

(La barra significa que la sucesión de cifras se repite por siempre.) Si el número es irracional, la representación decimal no es periódica:

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots \qquad \pi = 3.141592653589793\ldots$$

Un número decimal periódico como

$$x = 3.5474747\ldots$$

es un número racional. Para convertirlo en un cociente de dos enteros, escribimos

$$\begin{array}{r@{\;=\;}l} 1000x & 3547.47474747\ldots \\ \underline{10x} & \underline{35.47474747\ldots} \\ 990x & 3512.0 \end{array}$$

Por consiguiente, $x = \frac{3512}{990}$. (La idea es multiplicar x por potencias adecuadas de 10, y luego restar para eliminar la parte que se repite.)

Si interrumpimos la expansión decimal de cualquier número en un cierto lugar, tenemos una aproximación del número. Por ejemplo, podemos escribir

$$\pi \approx 3.14159265$$

donde el símbolo $\approx$ quiere decir "es aproximadamente igual a". A medida que tenemos más decimales es mejor la aproximación.

Propiedades de los números reales

Todos sabemos que $2 + 3 = 3 + 2$ y que $5 + 7 = 7 + 5$ y que $513 + 87 = 87 + 513$, y así sucesivamente. En álgebra, expresamos estos hechos, que son infinitos, mediante la expresión

$$a + b = b + a$$

donde a y b son dos números cualquiera. En otras palabras, "$a + b = b + a$" es una manera concisa de decir que "cuando se suman dos números, no importa el orden en que se sumen". Este hecho se conoce como *Propiedad conmutativa* de la suma. De acuerdo con nuestra experiencia con los números, sabemos que las propiedades de la tabla siguiente son también válidas.

Propiedades de los números reales

Propiedad	Ejemplo	Descripción
Propiedades conmutativas		
$a + b = b + a$	$7 + 3 = 3 + 7$	Cuando se suman dos números, no importa el orden.
$ab = ba$	$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$	Cuando se multiplican dos números no importa el orden.
Propiedades asociativas		
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$	Cuando se suman tres números, no importa cuáles dos se suman primero.
$(ab)c = a(bc)$	$(3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5)$	Cuando multiplicamos tres números no importa cuáles dos se multiplican primero.
Propiedad distributiva		
$a(b + c) = ab + ac$ $(b + c)a = ab + ac$	$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ $(3 + 5) \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$	Cuando se multiplica un número por una suma de dos números se obtiene el mismo resultado al multiplicar el número por cada uno de los términos y luego sumar los resultados.

La propiedad distributiva se aplica siempre que multiplicamos un número por una suma. En la figura 2 se explica por qué esta propiedad se aplica en el caso en el cual todos los números son enteros positivos, pero la propiedad es válida para cualquier número real a, b y c.

La propiedad distributiva es muy importante porque describe la manera en que interactúan la adición y la multiplicación.

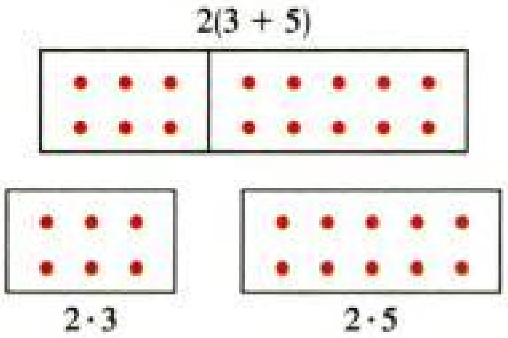


Figura 2
La propiedad distributiva

Ejemplo 1 Uso de la propiedad distributiva

$$\begin{aligned} \text{a)}\quad 2(x+3) &= 2\cdot x + 2\cdot 3 && \text{Propiedad distributiva}\\ &= 2x+6 && \text{Simplificación} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)}\quad \overbrace{(a+b)}(x+y) &= (a+b)x+(a+b)y && \text{Propiedad distributiva}\\ &= (ax+bx)+(ay+by) && \text{Propiedad distributiva}\\ &= ax+bx+ay+by && \text{Propiedad asociativa de la suma} \end{aligned}$$

En el último paso quitamos los paréntesis porque, de acuerdo con la propiedad asociativa, no importa el orden de la suma. ■

⊘ No suponga que $-a$ es un número negativo. Si $-a$ es negativa o positiva depende del valor de a. Por ejemplo, si $a = 5$, entonces $-a = -5$, un número negativo, pero si $a = -5$, entonces $-a = -(-5) = 5$ (propiedad 2), que es un número positivo.

El número 0 es especial para la adición; se le llama **elemento idéntico** porque $a + 0 = a$ para cualquier número real a. Todo número real a tiene un **negativo,** $-a$, que cumple $a + (-a) = 0$. La **sustracción** es la operación inversa a la adición; para restar un número de otro simplemente sumamos el negativo de ese número. Por definición

$$a - b = a + (-b)$$

Para combinar los números reales que contienen negativos, utilizamos las propiedades siguientes.

Propiedades de los negativos

Propiedad	Ejemplo
1. $(-1)a = -a$	$(-1)5 = -5$
2. $-(-a) = a$	$-(-5) = 5$
3. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$	$(-5)7 = 5(-7) = -(5\cdot 7)$
4. $(-a)(-b) = ab$	$(-4)(-3) = 4\cdot 3$
5. $-(a+b) = -a - b$	$-(3+5) = -3 - 5$
6. $-(a-b) = b - a$	$-(5-8) = 8 - 5$

La propiedad 6 establece el hecho intuitivo de que $a - b$ es el negativo de $b - a$. La propiedad 5 se usa a menudo con más de dos términos:

$$-(a+b+c) = -a - b - c$$

Ejemplo 2 Uso de las propiedades de los negativos

Sean x, y y z números reales.

$$\text{a)}\quad -(x+2) = -x-2 \qquad \text{Propiedad 5: } -(a+b) = -a-b$$

$$\begin{aligned} \text{b)}\quad -(x+y-z) &= -x-y-(-z) && \text{Propiedad 5: } -(a+b) = -a-b\\ &= -x-y+z && \text{Propiedad 2: } -(-a) = a \end{aligned}$$

■

El número 1 es especial para la multiplicación; se le llama **elemento idéntico** porque $a \cdot 1 = a$ para cualquier número real a. Todo número real diferente de cero a tiene un **inverso**, $1/a$, que cumple $a \cdot (1/a) = 1$. La **división** es la operación inversa de la multiplicación; para dividir un número multiplicamos por el inverso de ese número. Si $b \neq 0$, entonces, por definición,

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Escribimos $a \cdot (1/b)$ simplemente como a/b. Nos referimos a a/b como el **cociente** de a y b, o bien, como la **fracción** a entre b; a es el **numerador** y b es el **denominador** (o **divisor**). Para combinar los números reales usando la operación de división usamos las propiedades siguientes.

Propiedades de las fracciones

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$	Cuando se **multiplican fracciones**, se multiplican los numeradores y los denominadores.
2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$	Cuando se **dividen fracciones**, se invierte el divisor y se multiplica.
3. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$	$\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{2 + 7}{5} = \frac{9}{5}$	Cuando se **suman fracciones** con el **mismo denominador** se suman los numeradores.
4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}$	Cuando se **suman fracciones** con **denominadores diferentes**, se busca un denominador común. Luego se suman todos los numeradores.
5. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$	$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$	**Se anulan** los números que son **factores comunes** en el numerador y en el denominador.
6. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$	$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, por lo que $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$	**Multiplicación cruzada**.

Por lo regular, cuando se suman fracciones con denominadores diferentes, no se usa la propiedad 4. En lugar de eso se vuelven a escribir las fracciones de modo que tengan el denominador común más pequeño posible (con frecuencia más pequeño que el producto de los denominadores), y luego se aplica la propiedad 3. Este denominador es el **M**ínimo **C**omún **D**enominador (MCD) que se explica en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3 Uso del MCD en la suma de fracciones

Evalúe: $\frac{5}{36} + \frac{7}{120}$

Solución Al factorizar cada denominador en sus factores primos se tiene

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad \text{y} \qquad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Encontramos el Mínimo Común Denominador (MCD) efectuando el producto de todos los factores que hay en estas factorizaciones y se usa la potencia más alta de cada factor.

Por consiguiente, el MCD es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{5}{36} + \frac{7}{120} &= \frac{5 \cdot 10}{36 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 3}{120 \cdot 3} && \text{Uso del denominador común} \\ &= \frac{50}{360} + \frac{21}{360} = \frac{71}{360} && \text{Propiedad 3: sumar fracciones con el mismo denominador} \end{aligned}$$

■

La recta numérica

Los números reales se pueden representar mediante puntos sobre una recta, como se muestra en la figura 3. La dirección positiva, hacia la derecha, se señala por medio de una flecha. Escogemos un punto de referencia O arbitrario, al que llamamos **origen**, el cual corresponde al número real 0. Dada una unidad conveniente de medición, cada número positivo x se representa por un punto en la recta a una distancia de x unidades a la derecha del origen, y cada número negativo $-x$ se representa mediante un punto a x unidades a la izquierda del origen. El número asociado con el punto P se llama coordenada de P y la recta recibe el nombre de **eje coordenado** o de **recta de los números reales** o simplemente **recta real**. Con frecuencia identificamos el punto con su coordenada y pensamos que un número es el inicio de la recta numérica.

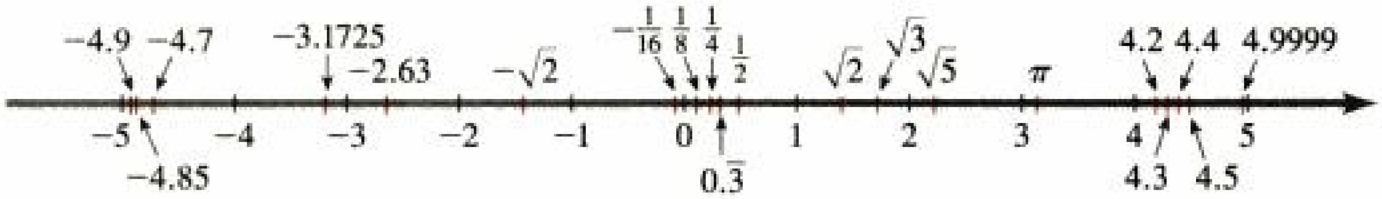


Figura 3 Recta de los números reales

Los números reales están *ordenados*. Decimos que ***a* es menor que *b*** y escribimos $a < b$ si $b - a$ es un número positivo. Desde el punto de vista geométrico, esto quiere decir que a queda a la izquierda de b en la recta numérica. Es lo mismo que decir que ***b* es mayor que *a*** y escribir $b > a$. El símbolo $a \leq b$ (o $b \geq a$), quiere decir que $a < b$ o $a = b$ y se lee como "a es menor que o igual a b". Por ejemplo, las siguientes son desigualdades verdaderas (véase figura 4):

$$7 < 7.4 < 7.5 \qquad -\pi < -3 \qquad \sqrt{2} < 2 \qquad 2 \leq 2$$

Figura 4

Conjuntos e intervalos

Un **conjunto** es una colección de objetos, y estos objetos se denominan **elementos** del conjunto. Si S es un conjunto, la notación $a \in S$ significa que a es un elemento que pertenece a S, y $b \notin S$ quiere decir que b no es un elemento de S. Por ejemplo, si Z representa el conjunto de los enteros, entonces, $-3 \in Z$ pero $\pi \notin Z$.

Algunos de los conjuntos se pueden describir acomodando sus elementos dentro de corchetes. Por ejemplo, un conjunto A que consiste en todos los enteros positivos menores que 7 se expresa como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

También podríamos escribir A en la **notación de conjuntos**:

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero y } 0 < x < 7\}$$

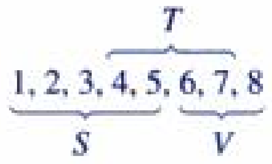
que se lee "A es el conjunto de todas las x tales que x es un entero y $0 < x < 7$."

Si S y T son conjuntos, entonces la **unión** $S \cup T$ es el conjunto que consta de todos los elementos que están en S o en T o en ambos. La **intersección** de S y de T es el conjunto $S \cap T$ que consiste en todos los elementos que están tanto en S como en T. En otras palabras, $S \cap T$ es la parte que es común a S y a T. El **conjunto vacío**, denotado por $\varnothing$ es el conjunto que no contiene elementos.

Ejemplo 4 Unión e intersección de conjuntos

Si $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{4, 5, 6, 7\}$, y $V = \{6, 7, 8\}$, determine los conjuntos $S \cup T$, $S \cap T$ y $S \cap V$.

Solución



$S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ Todos los elementos que están en S o en T

$S \cap T = \{4, 5\}$ Elementos comunes tanto a S como a T

$S \cap V = \varnothing$ S y V no tienen elementos en común ■

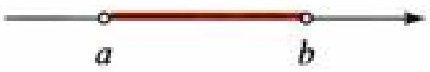


Figura 5
Intervalo abierto (a, b)

Ciertos conjuntos de números reales, llamados **intervalos**, se presentan con mucha frecuencia en el cálculo y corresponden geométricamente a segmentos lineales. Si $a < b$, entonces el **intervalo abierto** desde a hasta b consta de todos los números entre a y b y se denota con (a, b). El **intervalo cerrado** desde a hasta b comprende los extremos y se denota con $[a, b]$. Usando la notación de conjuntos, podemos escribir

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \qquad [a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$$

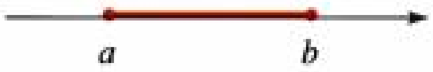
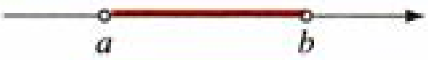
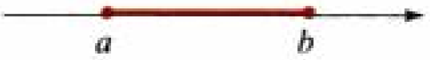
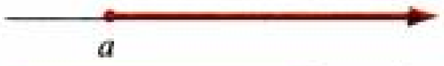


Figura 6
Intervalo cerrado $[a, b]$

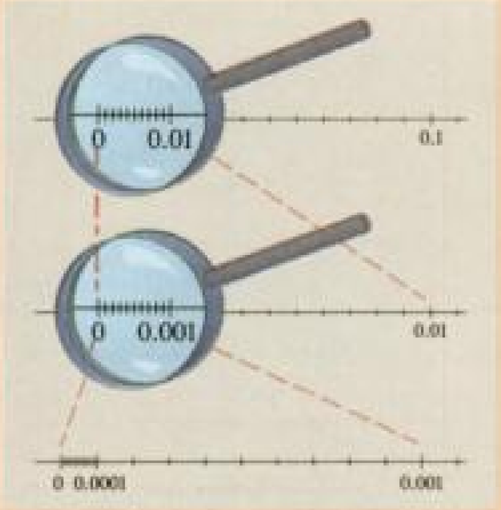
Observe que el paréntesis ( ) en la notación de los intervalos y los círculos abiertos en la gráfica de la figura 5 indican que los extremos están *excluidos* del intervalo. Por otro lado, los corchetes [ ] y los círculos llenos de la figura 6 indican que los extremos están *incluidos*. Los intervalos pueden incluir sólo un punto extremo, o se podrían prolongar hasta el infinito en una dirección o en ambas direcciones. En la siguiente tabla se ilustran los tipos posibles de intervalos.

Notación	Descripción del conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \le x \le b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \le x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \le b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \le x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \le b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

El símbolo ∞ ("infinito") no es un número. La notación (a, ∞), por ejemplo, indica simplemente que el intervalo no tiene punto final a la derecha, sino que se prolonga hacia el infinito en la dirección positiva.

No hay número más pequeño o más grande en un intervalo abierto

Cualquier intervalo contiene una cantidad infinita de números —cada punto en la gráfica de un intervalo corresponde a un número real—. En el intervalo cerrado [0, 1], el número más pequeño es 0 y el más grande es 1, pero el intervalo abierto (0, 1) no contiene un número que sea el más pequeño o el más grande. Para entenderlo, observe que 0.01 está cerca de cero, pero 0.001 está más cerca, y 0.0001 está todavía más cerca, y así sucesivamente. De este modo, siempre podemos encontrar un número en el intervalo (0, 1) más cercano a cero que cualquier número dado. Puesto que 0 en sí no está en el intervalo, el intervalo no contiene un número que sea el más pequeño. Con el mismo razonamiento, 0.99 está cercano a 1, pero 0.999 está más cerca, 0.9999 es aún más cercano, y así sucesivamente. Como el 1 no está en el intervalo, éste no contiene un número que sea el más grande.

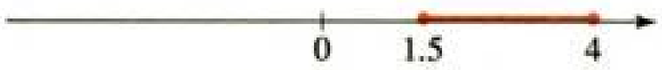


Ejemplo 5 Graficación de intervalos

Exprese cada intervalo en términos de desigualdades, y luego grafíquelos.

a) $[-1, 2) = \{x \mid -1 \le x < 2\}$

b) $[1.5, 4] = \{x \mid 1.5 \le x \le 4\}$



c) $(-3, \infty) = \{x \mid -3 < x\}$ ■

Ejemplo 6 Determinar la unión y la intersección de intervalos

Grafique cada conjunto

a) $(1, 3) \cap [2, 7]$ b) $(1, 3) \cup [2, 7]$

Solución

a) La intersección de dos intervalos consiste en los números que están en ambos intervalos. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(1, 3) \cap [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \ \text{ y } \ 2 \le x \le 7\}\\ &= \{x \mid 2 \le x < 3\} = [2, 3)\end{aligned}$$

Este conjunto se ilustra en la figura 7.

b) La unión de dos intervalos son los números que están en un intervalo o en el otro o en ambos. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(1, 3) \cup [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ o } 2 \le x \le 7\}\\ &= \{x \mid 1 < x \le 7\} = (1, 7]\end{aligned}$$

Este conjunto se ilustra en la figura 8.

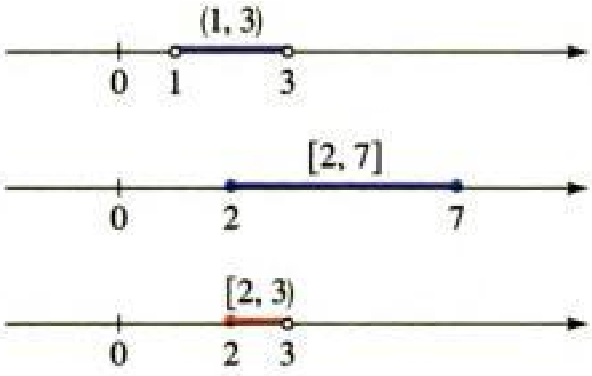


Figura 7
$(1, 3) \cap [2, 7] = [2, 3)$

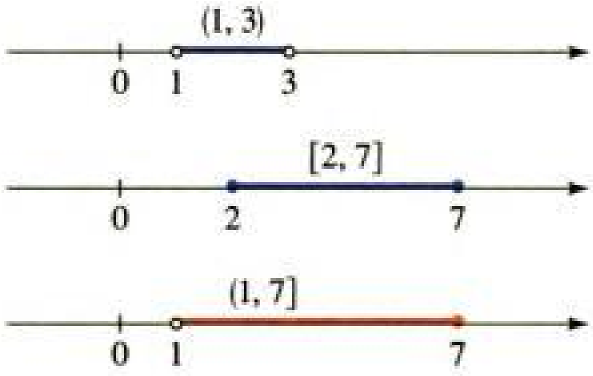


Figura 8
$(1, 3) \cup [2, 7] = (1, 7]$ ■

Valor absoluto y distancia

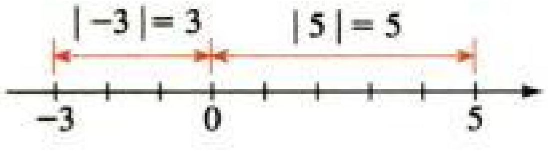


Figura 9

El **valor absoluto** de un número a, denotado por $|a|$, es la distancia desde a hasta 0 sobre la recta de los números reales (véase la figura 9). La distancia es siempre positiva o cero, de modo que tenemos $|a| \ge 0$ para cada número a. Tenga en cuenta que $-a$ es positiva cuando a es negativa, y entonces tenemos la definición siguiente.

Definición de valor absoluto

Si a es un número real, entonces el **valor absoluto** de a es

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 7 Determinación de los valores absolutos de números

a) $|3| = 3$

b) $|-3| = -(-3) = 3$

c) $|0| = 0$

d) $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$ (puesto que $3 < \pi \Rightarrow 3 - \pi < 0$) ■

Cuando se trabaja con números absolutos, usamos las propiedades siguientes.

Propiedades del valor absoluto

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\lvert a\rvert \geq 0$	$\lvert -3\rvert = 3 \geq 0$	El valor absoluto de un número es siempre positivo o cero.
2. $\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert$	$\lvert 5\rvert = \lvert -5\rvert$	Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto.
3. $\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert \lvert b\rvert$	$\lvert -2\cdot 5\rvert = \lvert -2\rvert \lvert 5\rvert$	El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.
4. $\left\lvert \frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$	$\left\lvert \frac{12}{-3}\right\rvert = \frac{\lvert 12\rvert}{\lvert -3\rvert}$	El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.

Figura 10

¿Cuál es la distancia en la recta numérica entre los números -2 y 11? En la figura 10, vemos que la distancia es 13. Llegamos a este resultado luego de determinar $|11 - (-2)| = 13$, o bien, $|(-2) - 11| = 13$. De acuerdo con esta observación damos la definición siguiente (véase la figura 11).

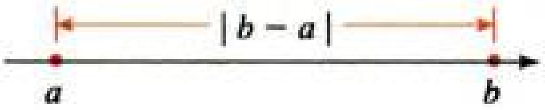


Figura 11
Longitud de un segmento de recta $= |b - a|$

Distancia entre puntos de la recta de los números reales

Si a y b son números reales, entonces la **distancia** entre los puntos a y b en la recta numérica es

$$d(a, b) = |b - a|$$

De acuerdo con la propiedad 6 se infiere que $|b - a| = |a - b|$. Esto confirma que, como es de esperarse, la distancia de a a b es la misma que la distancia de b a a.

Ejemplo 8 Distancia entre puntos de la recta numérica

La distancia entre los números -8 y 2 es

$$d(a, b) = |-8 - 2| = |-10| = 10$$

Podemos comprobar geométricamente este cálculo, como se ilustra en la figura 12. ■

Figura 12

1.1 Ejercicios

1–2 ■ Liste los elementos del conjunto dado que son

a) números naturales
b) enteros
c) números racionales
d) números irracionales

1. $\{0, -10, 50, \frac{22}{7}, 0.538, \sqrt{7}, 1.2\overline{3}, -\frac{1}{3}, \sqrt[3]{2}\}$

2. $\{1.001, 0.333\ldots, -\pi, -11, 11, \frac{13}{15}, \sqrt{16}, 3.14, \frac{15}{3}\}$

3–10 ■ Establezca la propiedad de los números reales que se está usando.

3. $7 + 10 = 10 + 7$

4. $2(3 + 5) = (3 + 5)2$

5. $(x + 2y) + 3z = x + (2y + 3z)$

6. $2(A + B) = 2A + 2B$

7. $(5x + 1)3 = 15x + 3$

8. $(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b$

9. $2x(3 + y) = (3 + y)2x$

10. $7(a + b + c) = 7(a + b) + 7c$

11–14 ■ Escriba de nuevo la expresión aplicando la propiedad dada de los números reales

11. Propiedad conmutativa de la adición, $x + 3 =$ ☐

12. Propiedad asociativa de la multiplicación, $7(3x) =$ ☐

13. Propiedad distributiva, $4(A + B) =$ ☐

14. Propiedad distributiva, $5x + 5y =$ ☐

15–20 ■ Aplique las propiedades de los números reales para escribir las expresiones sin paréntesis.

15. $3(x + y)$ **16.** $(a - b)8$

17. $4(2m)$ **18.** $\frac{4}{3}(-6y)$

19. $-\frac{5}{2}(2x - 4y)$ **20.** $(3a)(b + c - 2d)$

21–26 ■ Efectúe las operaciones indicadas.

21. a) $\frac{3}{10} + \frac{4}{15}$ **b)** $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

22. a) $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$ **b)** $1 + \frac{5}{8} - \frac{1}{6}$

23. a) $\frac{2}{3}(6 - \frac{3}{2})$ **b)** $0.25(\frac{8}{9} + \frac{1}{2})$

24. a) $(3 + \frac{1}{4})(1 - \frac{4}{5})$ **b)** $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$

25. a) $\dfrac{2}{\frac{2}{3}} - \dfrac{\frac{2}{3}}{2}$ **b)** $\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{9}}$

26. a) $\dfrac{2 - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$ **b)** $\dfrac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} + \frac{3}{15}}$

27–28 ■ Escriba el símbolo correcto ($<$, $>$ o $=$) en el espacio.

27. a) 3 ☐ $\frac{7}{2}$ **b)** -3 ☐ $-\frac{7}{2}$ **c)** 3.5 ☐ $\frac{7}{2}$

28. a) $\frac{2}{3}$ ☐ 0.67 **b)** $\frac{2}{3}$ ☐ -0.67 **c)** $|0.67|$ ☐ $|-0.67|$

29–32 ■ Diga de cada desigualdad si es verdadera o falsa.

29. a) $-6 < -10$ **b)** $\sqrt{2} > 1.41$

30. a) $\dfrac{10}{11} < \dfrac{12}{13}$ **b)** $-\dfrac{1}{2} < -1$

31. a) $-\pi > -3$ **b)** $8 \leq 9$

32. a) $1.1 > 1.\overline{1}$ **b)** $8 \leq 8$

33–34 ■ Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

33. a) x es positiva
b) t es menor que 4
c) a es mayor que o igual a π
d) x es menor que $\frac{1}{3}$ y es mayor que -5
e) La distancia desde p hasta 3 es cuando mucho 5

34. a) y es negativa
b) z es mayor que 1
c) b es cuanto más 8

d) w es positiva y es menor o igual a 17

e) y está por lo menos a 2 unidades desde π

35–38 ■ Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$C = \{7, 8, 9, 10\}$$

35. **a)** $A \cup B$ **b)** $A \cap B$

36. **a)** $B \cup C$ **b)** $B \cap C$

37. **a)** $A \cup C$ **b)** $A \cap C$

38. **a)** $A \cup B \cup C$ **b)** $A \cap B \cap C$

39–40 ■ Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{x \mid x \geq -2\} \qquad B = \{x \mid x < 4\}$$
$$C = \{x \mid -1 < x \leq 5\}$$

39. **a)** $B \cup C$ **b)** $B \cap C$

40. **a)** $A \cap C$ **b)** $A \cap B$

41–46 ■ Exprese el intervalo en forma de desigualdad, y luego grafique el intervalo.

41. $(-3, 0)$ **42.** $(2, 8]$

43. $[2, 8)$ **44.** $[-6, -\frac{1}{2}]$

45. $[2, \infty)$ **46.** $(-\infty, 1)$

47–52 ■ Exprese la desigualdad con notación de intervalo, y después grafique el intervalo correspondiente.

47. $x \leq 1$ **48.** $1 \leq x \leq 2$

49. $-2 < x \leq 1$ **50.** $x \geq -5$

51. $x > -1$ **52.** $-5 < x < 2$

53–54 ■ Exprese cada conjunto mediante la notación de los intervalos.

53. **a)**

b)

54. **a)**

b)

55–60 ■ Grafique el conjunto.

55. $(-2, 0) \cup (-1, 1)$ **56.** $(-2, 0) \cap (-1, 1)$

57. $[-4, 6] \cap [0, 8)$ **58.** $[-4, 6) \cup [0, 8)$

59. $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$ **60.** $(-\infty, 6] \cap (2, 10)$

61–66 ■ Evalúe cada una de las expresiones.

61. **a)** $|100|$ **b)** $|-73|$

62. **a)** $|\sqrt{5} - 5|$ **b)** $|10 - \pi|$

63. **a)** $||-6| - |-4||$ **b)** $\dfrac{-1}{|-1|}$

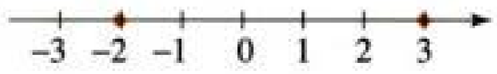
64. **a)** $|2 - |-12||$ **b)** $-1 - |1 - |-1||$

65. **a)** $|(-2) \cdot 6|$ **b)** $|(-\frac{1}{3})(-15)|$

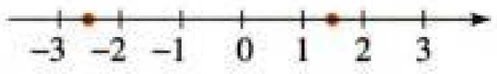
66. **a)** $\left|\dfrac{-6}{24}\right|$ **b)** $\left|\dfrac{7 - 12}{12 - 7}\right|$

67–70 ■ Determine la distancia entre los números dados.

67.



68.



69. **a)** 2 y 17

b) -3 y 21

c) $\frac{11}{8}$ y $-\frac{3}{10}$

70. **a)** $\frac{7}{15}$ y $-\frac{1}{21}$

b) -38 y -57

c) -2.6 y -1.8

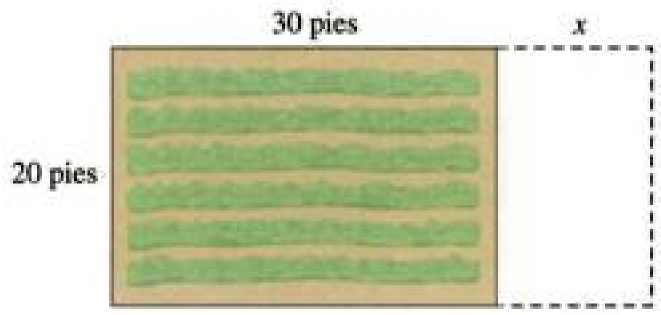
71–72 ■ Exprese cada uno de los decimales periódicos en forma de fracción. (Véase la nota al margen de la página 2.)

71. **a)** $0.\overline{7}$ **b)** $0.2\overline{8}$ **c)** $0.\overline{57}$

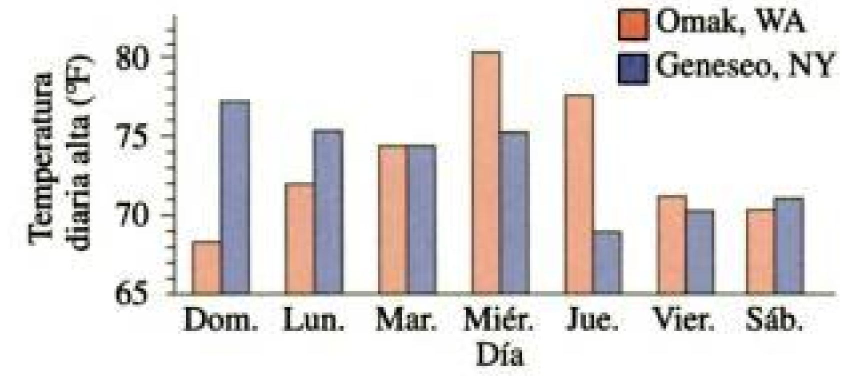
72. **a)** $5.\overline{23}$ **b)** $1.3\overline{7}$ **c)** $2.\overline{135}$

Aplicaciones

73. Superficie de un jardín El terreno trasero donde Mary siembra verduras mide 20 por 30 pies, por lo que esa área es $20 \times 30 = 600$ pies cuadrados. Decide agrandarlo, como se muestra en la figura, de modo que el área se incrementa a $A = 20(30 + x)$. ¿Cuál propiedad de los números reales dice que la nueva área se puede expresar también como $A = 600 + 20x$?



74. Variación de la temperatura La gráfica de barras muestra las temperaturas diarias altas de Omak, Washington, y Geneseo, Nueva York, durante una cierta semana de junio. Sea T_O la temperatura de Omak y T_G la temperatura de Geneseo. Calcule $T_O - T_G$ y $|T_O - T_G|$ para cada uno de los días mostrados. ¿Cuál de los dos valores da más información?

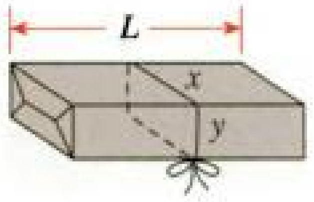


75. Envío por correo de un paquete La oficina de correos sólo aceptará paquetes para los cuales el largo más lo que mida alrededor no sea mayor que 108 pulg. Por consiguiente, para el paquete de la figura, debemos tener

$$L + 2(x + y) \leq 108$$

a) ¿La oficina de correos aceptará un paquete que mide 6 pulg de ancho, 8 pulg de alto y 5 pies de largo? ¿Y un paquete que mide 2 por 2 por 4 pies?

b) ¿Cuál es el mayor largo aceptable para un paquete que tiene base cuadrada y mide 9 por 9 pulg?



Descubrimiento • Análisis

76. Signos de números Sean a, b y c números reales tales que $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. Determine el signo de cada expresión.

a) $-a$ **b)** $-b$ **c)** bc
d) $a - b$ **e)** $c - a$ **f)** $a + bc$
g) $ab + ac$ **h)** $-abc$ **i)** ab^2

77. Sumas y productos de números racionales e irracionales Explique por qué la suma, la diferencia y el producto de dos números racionales son números racionales. ¿El producto de dos números irracionales es necesariamente irracional? ¿Qué sucede con la suma?

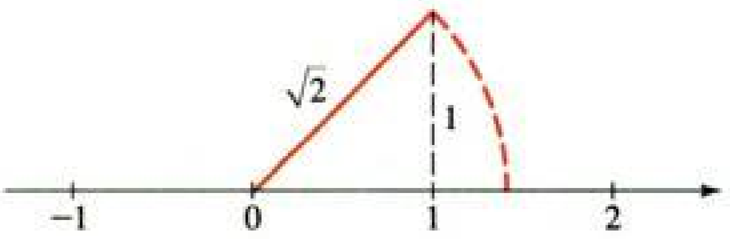
78. Combinación de números racionales con números irracionales ¿Es $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ racional o irracional? Es $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ racional o irracional? En general, ¿qué puede decir con respecto a la suma de un número racional y un número irracional? ¿Y del producto?

79. Comportamiento limitante de los recíprocos Complete las tablas. ¿Qué sucede con el tamaño de la fracción $1/x$ cuando x se incrementa? ¿Y cuando disminuye?

x	$1/x$
1	
2	
10	
100	
1000	

x	$1/x$
1.0	
0.5	
0.1	
0.01	
0.001	

80. Números irracionales y geometría Refiérase a la figura siguiente y explique cómo ubicar el punto $\sqrt{2}$ sobre una recta numérica. ¿Puede localizar $\sqrt{5}$ mediante un método similar? ¿Y $\sqrt{6}$? Mencione otros números irracionales que se pueden ubicar mediante este modo.



81. Operaciones conmutativa y no conmutativa Hemos visto que tanto la suma como la multiplicación son operaciones conmutativas.

(a) ¿Es conmutativa la substracción?

(b) ¿Es conmutativa la división de números reales no cero?

1.2 Exponentes y radicales

En esta sección damos el significado de expresiones como $a^{m/n}$ en las cuales el exponente m/n es un número racional. Para hacerlo, necesitamos recordar algunos hechos con respecto a los exponentes, radicales y raíces n-ésimas de enteros.

Exponentes enteros

Por lo regular, un producto de números idénticos se expresa mediante la notación exponencial. Por ejemplo, $5 \cdot 5 \cdot 5$ se escribe como 5^3. En general, tenemos la definición siguiente.

Notación exponencial

Si a es un número real cualquiera y n es un entero positivo, entonces la **potencia n-ésima** de a es

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El número a se denomina **base** y n es el **exponente**.

Ejemplo 1 Notación exponencial

Observe la distinción entre $(-3)^4$ y -3^4. En $(-3)^4$ el exponente se aplica a -3, pero en -3^4 el exponente se aplica sólo a 3.

a) $(\frac{1}{2})^5 = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{32}$

b) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

c) $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$ ■

Podemos establecer varias reglas útiles para trabajar con la notación exponencial. Para descubrir la regla de la multiplicación, multipliquemos 5^4 por 5^2:

$$5^4 \cdot 5^2 = \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)}_{4 \text{ factores}}\underbrace{(5 \cdot 5)}_{2 \text{ factores}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{6 \text{ factores}} = 5^6 = 5^{4+2}$$

Al parecer, al *multiplicar dos potencias de la misma base, sumamos los exponentes*. En general, para cualquier número real a y los enteros positivos m y n, tenemos

$$a^m a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m \text{ factores}}\underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m + n \text{ factores}} = a^{m+n}$$

Por consiguiente $a^m a^n = a^{m+n}$.

Nos gustaría que esta regla fuera válida incluso cuando m y n sean 0 o enteros negativos. Por ejemplo,

$$2^0 \cdot 2^3 = 2^{0+3} = 2^3$$

Pero esto sólo puede suceder si $2^0 = 1$. De igual manera, queremos tener

$$5^4 \cdot 5^{-4} = 5^{4+(-4)} = 5^{4-4} = 5^0 = 1$$

y esto será cierto si $5^{-4} = 1/5^4$. Estas observaciones generan la definición siguiente:

Exponentes cero y negativos

Si $a \neq 0$ es un número real y n es un entero positivo, entonces

$$a^0 = 1 \qquad \text{y} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplo 2 Exponentes cero y negativos

a) $(\frac{4}{7})^0 = 1$

b) $x^{-1} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{x}$

c) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$ ■

Es esencial conocer las reglas siguientes para trabajar con los exponentes y bases. En la tabla siguiente, las bases a y b son números reales y los exponentes m y n son enteros.

Leyes de los exponentes

Ley	Ejemplo	Descripción
1. $a^ma^n = a^{m+n}$	$3^2\cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$	Para multiplicar dos potencias del mismo número, sume los exponentes.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$	Para dividir dos potencias del mismo número, reste los exponentes.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^2)^5 = 3^{2\cdot 5} = 3^{10}$	Para elevar una potencia a una nueva potencia, multiplique los exponentes.
4. $(ab)^n = a^nb^n$	$(3\cdot 4)^2 = 3^2\cdot 4^2$	Para elevar un producto a una potencia, eleve cada factor a la potencia.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3^2}{4^2}$	Para elevar un cociente a una potencia, eleve tanto el numerador y denominador a la potencia.

■ **Demostración de la ley 3** Si m y n son enteros positivos, tenemos

$$(a^m)^n = (\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{m\text{ factores}})^n$$

$$= \underbrace{(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{m\text{ factores}})(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{m\text{ factores}})\cdots(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{m\text{ factores}})}_{n\text{ grupos de factores}}$$

$$= \underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a = a^{mn}}_{mn\text{ factores}}$$

Los casos para los cuales $m \le 0$ o $n \le 0$ se pueden demostrar usando la definición de los exponentes negativos. ■

■ **Demostración de la ley 4** Si n es un entero positivo, tenemos

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}_{n\text{ factores}} = \underbrace{(a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}_{n\text{ factores}}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdot\cdots\cdot b)}_{n\text{ factores}} = a^nb^n$$

En este caso hemos aplicado las propiedades conmutativa y asociativa de manera repetida. Si $n \le 0$ la ley 4 se puede demostrar usando la definición de los exponentes negativos. ■

En el ejercicio 88 se le pide demostrar las leyes 2 y 5.

Ejemplo 3 Aplicación de las leyes de los exponentes

a) $x^4x^7 = x^{4+7} = x^{11}$ Ley 1: $a^ma^n = a^{m+n}$

b) $y^4y^{-7} = y^{4-7} = y^{-3} = \dfrac{1}{y^3}$ Ley 1: $a^ma^n = a^{m+n}$

c) $\dfrac{c^9}{c^5} = c^{9-5} = c^4$ Ley 2: $a^m/a^n = a^{m-n}$

d) $(b^4)^5 = b^{4\cdot5} = b^{20}$ Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$

e) $(3x)^3 = 3^3x^3 = 27x^3$ Ley 4: $(ab)^n = a^nb^n$

f) $\left(\dfrac{x}{2}\right)^5 = \dfrac{x^5}{2^5} = \dfrac{x^5}{32}$ Ley 5: $(a/b)^n = a^n/b^n$ ■

Ejemplo 4 Simplificación de expresiones con exponentes

Simplifique:

a) $(2a^3b^2)(3ab^4)^3$ b) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3\left(\dfrac{y^2x}{z}\right)^4$

Solución

a) $(2a^3b^2)(3ab^4)^3 = (2a^3b^2)[3^3a^3(b^4)^3]$ Ley 4: $(ab)^n = a^nb^n$

$= (2a^3b^2)(27a^3b^{12})$ Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$

$= (2)(27)a^3a^3b^2b^{12}$ Agrupación de factores con la misma base

$= 54a^6b^{14}$ Ley 1: $a^ma^n = a^{m+n}$

b) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3\left(\dfrac{y^2x}{z}\right)^4 = \dfrac{x^3}{y^3}\dfrac{(y^2)^4x^4}{z^4}$ Ley 5 y 4

$= \dfrac{x^3}{y^3}\dfrac{y^8x^4}{z^4}$ Ley 3

$= (x^3x^4)\left(\dfrac{y^8}{y^3}\right)\dfrac{1}{z^4}$ Agrupación de factores con la misma base

$= \dfrac{x^7y^5}{z^4}$ Ley 1 y 2 ■

Al simplificar una expresión, encontrará que llega al mismo resultado mediante diferentes métodos. Siéntase libre de usar cualquiera de las reglas de los exponentes para poner en práctica su propio método. En seguida presentamos otras dos leyes que son útiles para simplificar expresiones con exponentes negativos.

Leyes de los exponentes

Ley	Ejemplo	Descripción
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2$	Para elevar una fracción a una potencia negativa, invierta la fracción y cambie el signo del exponente.
7. $\dfrac{a^{-n}}{b^{-m}} = \dfrac{b^m}{a^n}$	$\dfrac{3^{-2}}{4^{-5}} = \dfrac{4^5}{3^2}$	Para pasar un número elevado a una potencia desde el numerador al denominador o desde el denominador al numerador, cambie el signo del exponente.

■ **Demostración de la ley 7** Si usamos la definición de los exponentes negativos y luego aplicamos la propiedad 2 de las fracciones (pág. 5), tenemos

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{1/a^n}{1/b^m} = \frac{1}{a^n}\cdot\frac{b^m}{1} = \frac{b^m}{a^n}$$ ■

Se le pedirá que demuestre la ley 6 en el ejercicio 88.

Matemáticas en el mundo moderno

Si bien a menudo no nos percatamos de su presencia, la matemática impregna casi todos los aspectos de la vida del mundo moderno. Con la técnica moderna, las matemáticas desempeñan un papel más importante en nuestra vida. Quizá hoy usted despertó con la alarma de un reloj digital, habló por teléfono que usa transmisión digital, envió un mensaje por correo electrónico a través de Internet, guió un automóvil que cuenta con inyección de combustible controlada en forma digital, escuchó música por medio de un reproductor de discos compactos, luego durmió en una habitación cuya temperatura está controlada por un termostato digital. En cada una de estas actividades, las matemáticas son imprescindibles. En general, una propiedad como la intensidad o la frecuencia del sonido, el nivel de oxígeno en la emisión del escape del automóvil, los colores de una imagen, o la temperatura en la recámara es transformada en sucesiones de números mediante complicados algoritmos matemáticos. Estos datos numéricos, los cuales casi siempre consisten en varios millones de bits (los dígitos 0 y 1), se transmiten y luego se reinterpretan. Trabajar con esas enormes cantidades de datos no era posible antes de la invención de las computadoras, y los matemáticos fueron los que inventaron los procesos lógicos de estas máquinas.

La contribución de las matemáticas en el mundo moderno no se limita a los adelantos técnicos. Los procesos lógicos de las matemáticas se utilizan ahora para analizar problemas complejos en las ciencias sociales, políticas y biológicas de manera nueva y sorprendente. Los avances en las matemáticas continúan, algunos de los más emocionantes surgieron en la década recién finalizada.

En otras de las secciones de las *Matemáticas en el mundo moderno* se describe con más detalle cómo esta ciencia afecta a todos nosotros en nuestras actividades de la vida cotidiana.

Ejemplo 5 Simplificación de expresiones con exponentes negativos

Elimine los exponentes negativos y simplifique las expresiones.

a) $\dfrac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2}$ b) $\left(\dfrac{y}{3z^3}\right)^{-2}$

Solución

(a) Usamos la ley 7, la cual permite pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador, o viceversa, cambiando el signo del exponente.

t^{-4} se baja al denominador y se vuelve t^4.

s^{-2} se sube al numerador y se vuelve s^2.

$$\frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2} = \frac{6ss^2}{2t^2t^4} \qquad \text{Ley 7}$$

$$= \frac{3s^3}{t^6} \qquad \text{Ley 1}$$

b) Usamos la ley 6, que permite cambiar el signo del exponente de una fracción si ésta se invierte.

$$\left(\frac{y}{3z^3}\right)^{-2} = \left(\frac{3z^3}{y}\right)^2 \qquad \text{Ley 6}$$

$$= \frac{9z^6}{y^2} \qquad \text{Leyes 5 y 4}$$

■

Notación científica

Los científicos utilizan la notación exponencial para compactar la escritura de números muy grandes o de los muy pequeños. Por ejemplo, la estrella más cercana más allá del Sol, Alfa Centauro, está a casi 40 000 000 000 000 kilómetros. Por otro lado, la masa de un átomo de hidrógeno es de casi 0.00000000000000000000000166 g. Estos números son difíciles de leer y de escribir, de modo que los científicos los expresan casi siempre en *notación científica*.

Notación científica

Se dice que un número positivo x está escrito en **notación científica** si está expresado como sigue:

$$x = a \times 10^n \qquad \text{donde } 1 \le a < 10 \text{ y } n \text{ es un entero}$$

Por ejemplo, cuando establecemos que la distancia a la estrella Alfa Centauro es 4×10^{13} km, el exponente positivo 13 indica que el punto decimal se debe desplazar 13 lugares a la *derecha*:

$$4 \times 10^{13} = \underbrace{40\,000\,000\,000\,000}$$

Mover el punto decimal 13 lugares a la derecha.

Cuando decimos que la masa de un átomo de hidrógeno es 1.66×10^{-24} g, el exponente -24 indica que el punto decimal debe pasarse 24 lugares a la *izquierda*:

$$1.66 \times 10^{-24} = 0.00000000000000000000000166$$

Mover el punto decimal 24 lugares a la izquierda.

Ejemplo 6 Escritura de números en notación científica

a) $\underbrace{327900}_{\text{5 lugares}} = 3.279 \times 10^{5}$ b) $0.\underbrace{0006}_{\text{4 lugares}}27 = 6.27 \times 10^{-4}$ ■

Para utilizar la notación científica en una calculadora, presione la tecla $\boxed{\text{EE}}$ o bien $\boxed{\text{EXP}}$ o $\boxed{\text{EEX}}$ para ingresar el exponente. Por ejemplo, para escribir el número 3.629×10^{15} en una calculadora TI-83, escribimos

3.629 $\boxed{\text{2ND}}$ $\boxed{\text{EE}}$ 15

y en la pantalla se lee

`3.629E15`

La notación científica se aplica a menudo para escribir un número muy grande o muy pequeño en una calculadora. Por ejemplo, si usamos una calculadora para elevar al cuadrado el número 1 111 111, se puede ver en la pantalla, dependiendo del modelo de calculadora, la aproximación

`1.234568 12` o bien, `1.23468 E12`

En este caso, los dígitos finales indican la potencia de 10, e interpretamos que el resultado es

$$1.234568 \times 10^{12}$$

Ejemplo 7 Cálculos con ayuda de la notación científica

Si $a \approx 0.00046$, $b \approx 1.697 \times 10^{22}$, y $c \approx 2.91 \times 10^{-18}$, use una calculadora para obtener un valor aproximado del cociente ab/c.

Solución Podemos escribir los datos en notación científica, o bien, podemos usar las leyes de los exponentes como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{ab}{c} &\approx \frac{(4.6 \times 10^{-4})(1.697 \times 10^{22})}{2.91 \times 10^{-18}}\\ &= \frac{(4.6)(1.697)}{2.91} \times 10^{-4+22+18}\\ &\approx 2.7 \times 10^{36}\end{aligned}$$

Damos la respuesta correcta hasta con dos cifras significativas porque el menos exacto de los números dados tiene dos cifras significativas. ■

Radicales

Ya sabemos lo que 2^n significa siempre que n es un entero. Para dar el significado de una potencia, como $2^{4/5}$, cuyo exponente es un número racional, necesitamos estudiar a los radicales.

El símbolo $\sqrt{}$ significa "la raíz cuadrada de". Por lo tanto

$$\boxed{\sqrt{a} = b \quad \text{significa} \quad b^2 = a \quad \text{y} \quad b \geq 0}$$

Es cierto que el número 9 tiene dos raíces cuadradas, 3 y -3, pero la notación $\sqrt{9}$ se reserva para la raíz cuadrada *positiva* de 9 (a veces llamada *raíz cuadrada principal* de 9). Si queremos la raíz negativa, debemos escribir $-\sqrt{9}$, que es -3.

Puesto que $a = b^2 \geq 0$, el símbolo $\sqrt{a}$ tiene sentido sólo cuando $a \geq 0$. Por ejemplo,

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{porque} \quad 3^2 = 9 \quad \text{y} \quad 3 \geq 0$$

Las raíces cuadradas son casos especiales de las raíces n-ésimas. La raíz n-ésima de x es el número que cuando se eleva a la potencia n-ésima da x.

Definición de la raíz n-ésima

Si n es un entero positivo, entonces la **raíz n-ésima principal** de a se define como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{quiere decir} \quad b^n = a$$

Si n es par, debemos tener $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Por consiguiente,

$$\sqrt[4]{81} = 3 \qquad \text{porque} \qquad 3^4 = 81 \qquad \text{y} \qquad 3 \geq 0$$
$$\sqrt[3]{-8} = -2 \qquad \text{porque} \qquad (-2)^3 = -8$$

Pero $\sqrt{-8}$, $\sqrt[4]{-8}$ y $\sqrt[6]{-8}$ no están definidos. (Por ejemplo, $\sqrt{-8}$ no está definido porque el cuadrado de todo número real es no negativo.)

Observe que

$$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{pero} \qquad \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|$$

Entonces, la ecuación $\sqrt{a^2} = a$ no siempre se cumple; es verdadera sólo cuando $a \geq 0$. No obstante, siempre podemos escribir $\sqrt{a^2} = |a|$. Esta última ecuación es verdadera no sólo para raíces cuadradas, sino para cualquier raíz par. Ésta y otras reglas usadas al trabajar con raíces n-ésimas se listan en el siguiente cuadro. En cada propiedad suponemos que existen las raíces dadas.

Propiedades de las raíces n-ésimas

Propiedad	Ejemplo
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{2}{3}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5, \quad \sqrt[5]{2^5} = 2$
5. $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = \lvert -3 \rvert = 3$

Ejemplo 8 Simplificación de expresiones que contienen raíces n-ésimas

(a) $\sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{x^3 x}$ Sacar como factor el término más grande al cubo

$= \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x}$ Propiedad 1: $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$

$= x\sqrt[3]{x}$ Propiedad 4: $\sqrt[3]{a^3} = a$

b) $$\begin{aligned} \sqrt[4]{81x^8y^4} &= \sqrt[4]{81}\sqrt[4]{x^8}\sqrt[4]{y^4} && \text{Propiedad 1: } \sqrt[4]{abc} = \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt[4]{c} \\ &= 3\sqrt[4]{(x^2)^4}\,|y| && \text{Propiedad 5: } \sqrt[4]{a^4} = |a| \\ &= 3x^2|y| && \text{Propiedad 5: } \sqrt[4]{a^4} = |a|,\ |x^2| = x^2 \end{aligned}$$ ■

Con frecuencia es muy útil combinar radicales similares en una expresión como $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$. Se puede hacer usando la propiedad distributiva. Por lo tanto,

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

En el ejemplo siguiente se ilustra mejor este proceso.

Ejemplo 9 Combinación de radicales

a) $$\begin{aligned} \sqrt{32} + \sqrt{200} &= \sqrt{16\cdot 2} + \sqrt{100\cdot 2} && \text{Se sacan como factores los cuadrados más grandes} \\ &= \sqrt{16}\sqrt{2} + \sqrt{100}\sqrt{2} && \text{Propiedad 1: } \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \\ &= 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 14\sqrt{2} && \text{Propiedad distributiva} \end{aligned}$$

b) Si $b > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \sqrt{25b} - \sqrt{b^3} &= \sqrt{25}\sqrt{b} - \sqrt{b^2}\sqrt{b} && \text{Propiedad 1: } \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \\ &= 5\sqrt{b} - b\sqrt{b} && \text{Propiedad 5, } b > 0 \\ &= (5 - b)\sqrt{b} && \text{Propiedad distributiva} \end{aligned}$$ ■

Evite cometer el error siguiente:

$$\sqrt{a+b} \cancel{=} \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Por ejemplo, si hacemos $a = 9$ y $b = 16$, entonces vemos el error:

$$\sqrt{9+16} \overset{?}{=} \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

$$\sqrt{25} \overset{?}{=} 3 + 4$$

$$5 \overset{?}{=} 7 \quad \text{¡Falso!}$$

Exponentes racionales

Para definir lo que queremos decir con *exponente racional* o, lo que es lo mismo, *exponente fraccionario* como $a^{1/3}$, necesitamos usar los radicales. Con objeto de dar significado al símbolo $a^{1/n}$ de manera que sea consistente con las Leyes de los exponentes, tendríamos que tener

$$(a^{1/n})^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

Entonces, según la definición de raíz n-ésima,

$$\boxed{a^{1/n} = \sqrt[n]{a}}$$

En general, definimos los exponentes racionales como se señala a continuación.

Definición de exponentes racionales

Para cualquier exponente racional m/n de los términos más bajos, donde m y n son enteros y $n > 0$, definimos

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad \text{o en forma equivalente} \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si n es par, entonces es necesario que $a \geq 0$.

Con esta definición se puede demostrar que las *Leyes de los exponentes son válidas también para los exponentes racionales.*

Diofanto vivió en Alejandría por el año 250 antes de nuestra era. Se considera que su obra *Aritmética* es el primer libro sobre álgebra. En ella proporciona métodos para encontrar soluciones enteras de ecuaciones algebraicas. *Aritmética* fue la obra en la que se estudió por más de mil años. Fermat (véase página 652) hizo algunos de sus descubrimientos más importantes cuando estudiaba este libro. La contribución principal de Diofanto es el uso de símbolos para representar las incógnitas en un problema. Aunque este simbolismo no es tan simple como lo usamos en la actualidad, fue un gran adelanto para no escribir todo con palabras. En la notación de Diofanto, la ecuación

$$x^5 - 7x^2 + 8x - 5 = 24$$

se escribe

$$\Delta K^{\gamma}\alpha\varsigma\eta \pitchfork \Delta^{\gamma}\zeta\overset{\circ}{M}\epsilon\iota^{\sigma}\kappa\delta$$

La notación algebraica moderna no se volvió común sino hasta el siglo XVII.

Ejemplo 10 Uso de la definición de los exponentes racionales

a) $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$

b) $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ Otra solución: $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

c) $125^{-1/3} = \dfrac{1}{125^{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{1}{5}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \dfrac{1}{x^{4/3}} = x^{-4/3}$ ■

Ejemplo 11 Uso de las Leyes de los exponentes con exponentes racionales

a) $a^{1/3}a^{7/3} = a^{8/3}$ Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

b) $\dfrac{a^{2/5}a^{7/5}}{a^{3/5}} = a^{2/5+7/5-3/5} = a^{6/5}$ Ley 1, Ley 2: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

c) $(2a^3b^4)^{3/2} = 2^{3/2}(a^3)^{3/2}(b^4)^{3/2}$ Ley 4: $(abc)^n = a^n b^n c^n$

$= (\sqrt{2})^3 a^{3(3/2)} b^{4(3/2)}$ Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$

$= 2\sqrt{2}a^{9/2}b^6$

d) $\left(\dfrac{2x^{3/4}}{y^{1/3}}\right)^3\left(\dfrac{y^4}{x^{-1/2}}\right) = \dfrac{2^3(x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3}\cdot(y^4x^{1/2})$ Leyes 5, 4 y 7

$= \dfrac{8x^{9/4}}{y}\cdot y^4x^{1/2}$ Ley 3

$= 8x^{11/4}y^3$ Leyes 1 y 2 ■

Ejemplo 12 Simplificación al escribir radicales como exponentes racionales

a) $(2\sqrt{x})(3\sqrt[3]{x}) = (2x^{1/2})(3x^{1/3})$ Definición de exponentes racionales

$= 6x^{1/2+1/3} = 6x^{5/6}$ Ley 1

b) $\sqrt{x\sqrt{x}} = (xx^{1/2})^{1/2}$ Definición de exponentes racionales

$= (x^{3/2})^{1/2}$ Ley 1

$= x^{3/4}$ Ley 3 ■

Racionalización del denominador

Con frecuencia es muy útil eliminar el denominador mediante la multiplicación tanto del numerador como del denominador por una expresión adecuada. Este procedimiento recibe el nombre de **racionalización del denominador**. Si el denominador es de la forma $\sqrt{a}$, entonces multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{a}$. Al hacerlo, estamos multiplicando la cantidad por 1, de modo que no se altera el valor. Por ejemplo

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Obsérvese que el denominador en la última fracción no contiene radical alguno. En general, si el denominador es de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$, entonces al multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ racionalizamos el denominador, porque, en el caso de $a > 0$,

$$\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

Ejemplo 13 Racionalización de denominadores

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$

c) $\sqrt[7]{\dfrac{1}{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}} \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^5}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^7}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{a}$ ■

1.2 Ejercicios

1–8 ■ Escriba cada una de las expresiones con radicales usando exponentes y cada expresión exponencial usando radicales.

	Expresión con radicales	Expresión con exponentes
1.	$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$	
2.	$\sqrt[3]{7^2}$	
3.		$4^{2/3}$
4.		$11^{-3/2}$
5.	$\sqrt[5]{5^3}$	
6.		$2^{-1.5}$
7.		$a^{2/5}$
8.	$\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}$	

9–18 ■ Evalúe cada expresión

9. a) -3^2 b) $(-3)^2$ c) $(-3)^0$

10. a) $5^2 \cdot (\frac{1}{5})^3$ b) $\dfrac{10^7}{10^4}$ c) $\dfrac{3}{3^{-2}}$

11. a) $\dfrac{4^{-3}}{2^{-8}}$ b) $\dfrac{3^{-2}}{9}$ c) $(\frac{1}{4})^{-2}$

12. a) $(\frac{2}{3})^{-3}$ b) $(\frac{3}{2})^{-2} \cdot \frac{9}{16}$ c) $(\frac{1}{2})^4 \cdot (\frac{5}{2})^{-2}$

13. a) $\sqrt{16}$ b) $\sqrt[4]{16}$ c) $\sqrt[4]{1/16}$

14. a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt[3]{-64}$ c) $\sqrt[5]{-32}$

15. a) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{-1}{64}}$ c) $\dfrac{\sqrt[5]{-3}}{\sqrt[5]{96}}$

16. a) $\sqrt{7}\sqrt{28}$ b) $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ c) $\sqrt[4]{24}\sqrt[4]{54}$

17. a) $(\frac{4}{9})^{-1/2}$ b) $(-32)^{2/5}$ c) $-32^{2/5}$

18. a) $1024^{-0.1}$ b) $(-\frac{27}{8})^{2/3}$ c) $(\frac{25}{64})^{-3/2}$

19–22 ■ Evalúe la expresión usando $x = 3$, $y = 4$ y $z = -1$.

19. $\sqrt{x^2 + y^2}$

20. $\sqrt[4]{x^3 + 14y + 2z}$

21. $(9x)^{2/3} + (2y)^{2/3} + z^{2/3}$

22. $(xy)^{2z}$

23–26 ■ Simplifique la expresión.

23. $\sqrt{32} + \sqrt{18}$

24. $\sqrt{75} + \sqrt{48}$

25. $\sqrt[5]{96} + \sqrt[5]{3}$

26. $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}$

27–44 ■ Simplifique la expresión y elimine todos los exponentes negativos.

27. a^9a^{-5}

28. $(3y^2)(4y^5)$

29. $(12x^2y^4)(\frac{1}{2}x^5y)$

30. $(6y)^3$

31. $\dfrac{x^9(2x)^4}{x^3}$

32. $\dfrac{a^{-3}b^4}{a^{-5}b^5}$

33. $b^4(\frac{1}{3}b^2)(12b^{-8})$

34. $(2s^3t^{-1})(\frac{1}{4}s^6)(16t^4)$

35. $(rs)^3(2s)^{-2}(4r)^4$

36. $(2u^2v^3)^3(3u^3v)^{-2}$

37. $\dfrac{(6y^3)^4}{2y^5}$

38. $\dfrac{(2x^3)^2(3x^4)}{(x^3)^4}$

39. $\dfrac{(x^2y^3)^4(xy^4)^{-3}}{x^2y}$

40. $\left(\dfrac{c^4d^3}{cd^2}\right)\left(\dfrac{d^2}{c^3}\right)^3$

41. $\dfrac{(xy^2z^3)^4}{(x^3y^2z)^3}$ **42.** $\left(\dfrac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}}\right)^{-3}$

43. $\left(\dfrac{q^{-1}rs^{-2}}{r^{-5}sq^{-8}}\right)^{-1}$ **44.** $(3ab^2c)\left(\dfrac{2a^2b}{c^3}\right)^{-2}$

45–52 ■ Simplifique la expresión. Suponga que las letras representan números reales.

45. $\sqrt[4]{x^4}$ **46.** $\sqrt[5]{x^{10}}$

47. $\sqrt[4]{16x^8}$ **48.** $\sqrt[3]{x^3y^6}$

49. $\sqrt{a^2b^6}$ **50.** $\sqrt[3]{a^2b}\sqrt[3]{a^4b}$

51. $\sqrt[3]{\sqrt{64x^6}}$ **52.** $\sqrt[4]{x^4y^2z^2}$

53–70 ■ Simplifique la expresión y elimine los exponentes negativos. Suponga que las letras representan números positivos.

53. $x^{2/3}x^{1/5}$ **54.** $(2x^{3/2})(4x)^{-1/2}$

55. $(-3a^{1/4})(9a)^{-3/2}$ **56.** $(-2a^{3/4})(5a^{3/2})$

57. $(4b)^{1/2}(8b^{2/5})$ **58.** $(8x^6)^{-2/3}$

59. $(c^2d^3)^{-1/3}$ **60.** $(4x^6y^8)^{3/2}$

61. $(y^{3/4})^{2/3}$ **62.** $(a^{2/5})^{-3/4}$

63. $(2x^4y^{-4/5})^3(8y^2)^{2/3}$ **64.** $(x^{-5}y^3z^{10})^{-3/5}$

65. $\left(\dfrac{x^6y}{y^4}\right)^{5/2}$ **66.** $\left(\dfrac{-2x^{1/3}}{y^{1/2}z^{1/6}}\right)^4$

67. $\left(\dfrac{3a^{-2}}{4b^{-1/3}}\right)^{-1}$ **68.** $\dfrac{(y^{10}z^{-5})^{1/5}}{(y^{-2}z^3)^{1/3}}$

69. $\dfrac{(9st)^{3/2}}{(27s^3t^{-4})^{2/3}}$ **70.** $\left(\dfrac{a^2b^{-3}}{x^{-1}y^2}\right)^3\left(\dfrac{x^{-2}b^{-1}}{a^{3/2}y^{1/3}}\right)$

71–72 ■ Escriba las cantidades mediante la notación científica.

71. a) 69 300 000 **b)** 7 200 000 000 000
c) 0.000028536 **d)** 0.0001213

72. a) 129 540 000 **b)** 7 259 000 000
c) 0.0000000014 **d)** 0.0007029

73–74 ■ Escriba cada una de las cantidades en la notación decimal.

73. a) 3.19×10^5 **b)** 2.721×10^8
c) 2.670×10^{-8} **d)** 9.999×10^{-9}

74. a) 7.1×10^{14} **b)** 6×10^{12}
c) 8.55×10^{-3} **d)** 6.257×10^{-10}

75–76 ■ Escriba en notación científica la cantidad indicada en cada inciso.

75. a) Un año luz, la distancia que la luz recorre en un año, es de casi 9 460 800 000 000 km.

b) El diámetro de un electrón es de casi 0.0000000000004 cm.

c) Una gota de agua contiene más de 33 trillones de moléculas.

76. a) La distancia de la Tierra al Sol es de casi 150 millones de kilómetros.

b) La masa de una molécula de oxígeno es de casi 0.000000000000000000000053 g.

c) La masa de la Tierra es de casi 5 970 000 000 000 000 000 000 000 kg.

77–82 ■ Utilice la notación científica, las Leyes de los exponentes y la calculadora para ejecutar las operaciones señaladas. Proporcione su respuesta correcta de acuerdo con la cantidad de cifras significativas indicadas por los datos dados.

77. $(7.2 \times 10^{-9})(1.806 \times 10^{-12})$

78. $(1.062 \times 10^{24})(8.61 \times 10^{19})$

79. $\dfrac{1.295643 \times 10^9}{(3.610 \times 10^{-17})(2.511 \times 10^6)}$

80. $\dfrac{(73.1)(1.6341 \times 10^{28})}{0.0000000019}$

81. $\dfrac{(0.0000162)(0.01582)}{(594\,621\,000)(0.0058)}$ **82.** $\dfrac{(3.542 \times 10^{-6})^9}{(5.05 \times 10^4)^{12}}$

83–86 ■ Racionalice el denominador.

83. a) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{2}{x}}$ **c)** $\sqrt{\dfrac{x}{3}}$

84. a) $\sqrt{\dfrac{5}{12}}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{x}{6}}$ **c)** $\sqrt{\dfrac{y}{2z}}$

85. a) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$ **b)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{y^3}}$ **c)** $\dfrac{x}{y^{2/5}}$

86. a) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$ **b)** $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b^2}}$ **c)** $\dfrac{1}{c^{3/7}}$

87. Sean a, b y c números reales con $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. Determine el signo de cada expresión.

a) b^5 **b)** b^{10} **c)** ab^2c^3
d) $(b - a)^3$ **e)** $(b - a)^4$ **f)** $\dfrac{a^3c^3}{b^6c^6}$

88. Demuestre que las Leyes de los exponentes dadas para cada caso en el cual m y n son enteros positivos y $m > n$.

a) Ley 2 **b)** Ley 5 **c)** Ley 6

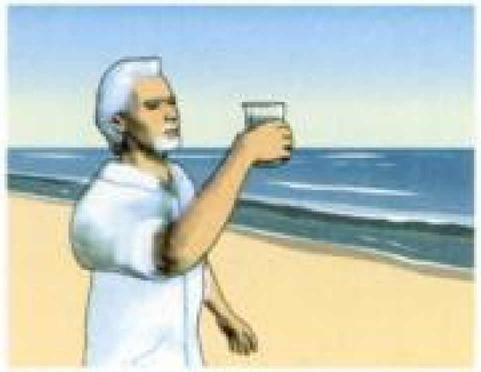
Aplicaciones

89. Distancia a la estrella más cercana Alfa Centauro, la estrella más cercana al Sistema Solar, está a 4.3 años luz.

Utilice la información del ejercicio 75 a) para expresar esta distancia en kilómetros.

90. **Velocidad de la luz** La velocidad de la luz es de casi 300 000 km/s. Utilice la información del ejercicio 76 a) para determinar cuánto tarda un rayo de luz en llegar a la Tierra desde el Sol.

91. **Volumen del mar** El promedio de la profundidad del mar es de 3.7×10^3 m, y la superficie del mar es de 3.6×10^{14} m^2. ¿Cuál es el volumen total del mar en litros? (Un metro cúbico contiene 1000 litros.)



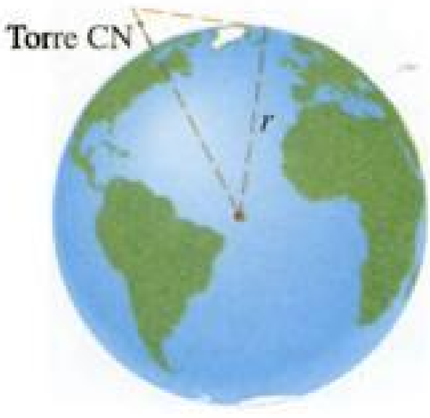
92. **Deuda nacional** En noviembre de 2004, la población de Estados Unidos era de 2.949×10^8, y la deuda nacional era de 7.529×10^{12} dólares. ¿Cuánto debe cada persona?

93. **Número de moléculas** Un cuarto aislado de hospital mide 5 m de ancho, 10 m de largo y 3 m de alto; se llena de oxígeno puro. Un metro cúbico contiene 1000 litros y 22.4 litros de cualquier gas contiene 6.02×10^{23} moléculas (número de Avogadro). ¿Cuántas moléculas de oxígeno hay en el cuarto?

94. **¿Qué tan lejos puede ver?** Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia máxima D que usted puede ver desde el último piso de un edificio alto cuya altura es h se estima mediante la fórmula

$$D = \sqrt{2rh + h^2}$$

donde $r = 3960$ millas es el radio de la Tierra y D y h también se miden en millas. ¿Qué tan lejos puede ver desde el mirador de la Torre de CN de Toronto, 1135 pies por arriba del suelo?



95. **Velocidad de un automóvil que frena** La policía aplica la fórmula $s = \sqrt{30fd}$ para estimar la velocidad s (en millas por hora) a la cual un vehículo se desplaza si recorre d pies después de que aplica los frenos en forma repentina. El número f es el coeficiente de fricción de la carretera, el cual es una medida de la "deslizabilidad" de la carretera. La tabla da algunas estimaciones representativas de f.

	Alquitrán	Concreto	Grava
Seco	1.0	0.8	0.2
Húmedo	0.5	0.4	0.1

(a) Si un automóvil se desliza 65 pies en concreto húmedo, ¿qué tan rápido iba cuando se aplicaron los frenos?

(b) Si el vehículo se desplaza a 50 millas por hora, ¿qué tanto se desliza en alquitrán húmedo?

96. **Distancia de la Tierra al Sol** Se infiere de la **Tercera Ley de Kepler** del movimiento de los planetas que la distancia promedio de un planeta al Sol, en metros, es

$$d = \left(\frac{GM}{4\pi^2}\right)^{1/3} T^{2/3}$$

donde $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg es la masa del Sol, $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$ es la constante gravitacional y T es el periodo de la órbita del planeta, en segundos. Aplique el hecho de que el periodo de la órbita de la Tierra es de casi 365.25 días para encontrar la distancia de la Tierra al Sol.

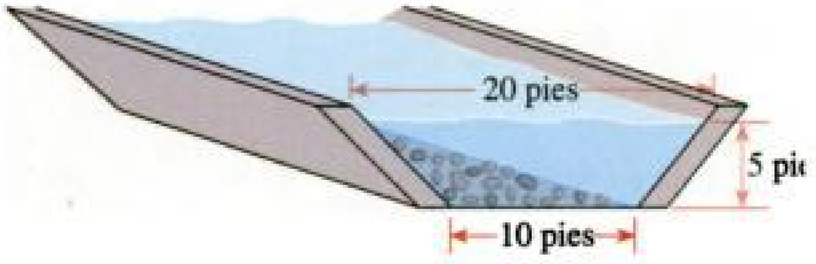
97. **Velocidad de flujo en un canal** La velocidad del agua que fluye por un canal o por el lecho de un río se rige por la **ecuación de Manning**

$$V = 1.486\,\frac{A^{2/3}S^{1/2}}{p^{2/3}n}$$

donde V es la velocidad del flujo en pies/s; A es el área de la sección transversal del canal; en pies cuadrados; S es la pendiente descendente del canal; p es el perímetro mojado en pies (la distancia desde la parte superior de una orilla, bajando por el lado del canal, atravesando el fondo y subiendo hasta la parte superior de la otra orilla), y n es el coeficiente de rugosidad (una medida de la rugosidad del fondo del canal). Esta ecuación se usa para predecir la capacidad de los canales de inundación para regular el escurrimiento de las fuertes deprecipitaciones pluviales. En el caso del canal mostrado en la figura, $A = 75$ pies cuadrados, $S = 0.050$, $p = 24.1$ pies, y $n = 0.040$.

a) Determinar la velocidad que lleva el agua por este canal.

b) ¿Cuántos pies cúbicos de agua puede descargar el canal por cada segundo? [*Sugerencia:* multiplique V por A para obtener el volumen del flujo por segundo.]



Descubrimiento • Análisis

98. ¿Qué tanto son mil millones? Si tiene un millón (10^6) de dólares en una valija y usted gasta mil (10^3) dólares cada día, ¿cuántos años tardaría en gastarse todo el dinero? Si gasta lo mismo, ¿cuántos años tardaría en vaciar la valija llena con *mil millones* (10^9) de dólares?

99. Potencias fáciles que parecen difíciles Calcule estas expresiones mentalmente. Aplique las Leyes de los exponentes para facilitar el proceso.

a) $\dfrac{18^5}{9^5}$ **b)** $20^6 \cdot (0.5)^6$

100. Comportamiento limitante de las potencias Complete las tablas siguientes. ¿Qué sucede con la raíz n-ésima de 2 cuando n se incrementa? ¿Qué sucede con la raíz n-ésima de $\frac{1}{2}$?

n	$2^{1/n}$
1	
2	
5	
10	
100	

n	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$
1	
2	
5	
10	
100	

Construya una tabla similar para $n^{1/n}$. ¿Qué sucede con la raíz e-ésima de n cuando n se incrementa?

101. Comparación de raíces Sin usar calculadora, determine qué número es más grande en cada par de valores.

a) $2^{1/2}$ o $2^{1/3}$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$ o $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$

c) $7^{1/4}$ o $4^{1/3}$ **d)** $\sqrt[3]{5}$ o $\sqrt{3}$

1.3 Expresiones algebraicas

Una **variable** es una letra que representa a cualquier número de un conjunto dado de números. Si empezamos con variables como x, y y z y algunos números reales, y los combinamos usando la suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces obtendremos una **expresión algebraica**. He aquí algunos ejemplos:

$$2x^2 - 3x + 4 \qquad \sqrt{x} + 10 \qquad \frac{y - 2z}{y^2 + 4}$$

Un **monomio** es una expresión de la forma ax^k, donde a es un número real y k es un entero no negativo. Un **binomio** es una suma de dos monomios y un **trinomio** es una suma de tres monomios. En general, una suma de monomios se llama *polinomio*. Por ejemplo, la primera expresión de las anteriores es un polinomio, pero las otras dos no lo son.

Polinomios

Un **polinomio** en la variable x es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio es de **grado n**. Los polinomios $a_k x^k$ que conforman el polinomio son los **términos** del polinomio.

Observe que el grado de un polinomio es la potencia más alta de la variable que aparece en el polinomio.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
$2x^2 - 3x + 4$	trinomio	$2x^2, -3x, 4$	2
$x^8 + 5x$	binomio	$x^8, 5x$	8
$3 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$	cuatro términos	$-\frac{1}{2}x^3, x^2, -x, 3$	3
$5x + 1$	binomio	$5x, 1$	1
$9x^5$	monomio	$9x^5$	5
6	monomio	6	0

Combinación de expresiones algebraicas

Sumamos y **restamos** polinomios aplicando las propiedades de los números reales que se estudian en la sección 1.1. La idea es combinar **términos semejantes** (es decir, términos con las mismas variables elevadas a las mismas potencias) usando la propiedad distributiva. Por ejemplo,

$$5x^7 + 3x^7 = (5 + 3)x^7 = 8x^7$$

Propiedad distributiva

$ac + bc = (a + b)c$

Al restar polinomios tenemos que recordar que si un signo menos precede a una expresión que se encuentra entre paréntesis, entonces el signo de cada término dentro del paréntesis cambia cuando eliminamos los paréntesis:

$$-(b + c) = -b - c$$

[Es simplemente un caso de la propiedad distributiva, $a(b + c) = ab + ac$, con $a = -1$.]

Ejemplo 1 Adición y sustracción de polinomios

a) Efectúe la suma $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

b) Encuentre la diferencia $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

Solución

a)
$$\begin{aligned} &(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x) \\ &\qquad = (x^3 + x^3) + (-6x^2 + 5x^2) + (2x - 7x) + 4 && \text{Agrupación de términos semejantes} \\ &\qquad = 2x^3 - x^2 - 5x + 4 && \text{Combinación de términos semejantes} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} &(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x) \\ &\qquad = x^3 - 6x^2 + 2x + 4 - x^3 - 5x^2 + 7x && \text{Propiedad distributiva} \\ &\qquad = (x^3 - x^3) + (-6x^2 - 5x^2) + (2x + 7x) + 4 && \text{Agrupación de términos semejantes} \\ &\qquad = -11x^2 + 9x + 4 && \text{Combinación de términos semejantes} \end{aligned}$$

■

Para encontrar el **producto** de polinomios o de otras expresiones algebraicas necesitamos usar la propiedad distributiva en forma repetida. En particular, al usarla tres veces en el producto de dos binomios, obtenemos

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Esto indica que para multiplicar los dos factores se multiplica cada uno de los términos de un factor por cada uno de los términos del otro factor y se suman los productos. En forma esquemática tenemos

La regla práctica siguiente ayuda a obtener el producto de dos binomios: el primero por el primero, el primero por el segundo, el segundo por el primero y el segundo por el segundo.

$$(a + b)(c + d) = \underset{\uparrow}{ac} + \underset{\uparrow}{ad} + \underset{\uparrow}{bc} + \underset{\uparrow}{bd}$$

En general, multiplicamos dos expresiones algebraicas usando la propiedad distributiva y las Leyes de los exponentes.

Ejemplo 2 Multiplicación de expresiones algebraicas

a) $(2x + 1)(3x - 5) = \underset{\uparrow}{6x^2} - \underset{\uparrow}{10x} + \underset{\uparrow}{3x} - \underset{\uparrow}{5}$ Propiedad distributiva

$= 6x^2 - 7x - 5$ Combinación de términos semejantes

b) $(x^2 - 3)(x^3 + 2x + 1) = x^2(x^3 + 2x + 1) - 3(x^3 + 2x + 1)$ Propiedad distributiva

$= x^5 + 2x^3 + x^2 - 3x^3 - 6x - 3$ Propiedad distributiva

$= x^5 - x^3 + x^2 - 6x - 3$ Combinación de términos semejantes

c) $(1 + \sqrt{x})(2 - 3\sqrt{x}) = 2 - 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 3(\sqrt{x})^2$ Propiedad distributiva

$= 2 - \sqrt{x} - 3x$ Combinación de términos semejantes ■

Ciertos tipos de productos son tan frecuentes que es necesario memorizarlos. Puede verificar las fórmulas siguientes efectuando las multiplicaciones.

Refiérase al Proyecto de descubrimiento de la página 34 para ver una interpretación geométrica de algunas de estas fórmulas.

Fórmulas para productos especiales

Si A y B son números reales o expresiones algebraicas, entonces

1. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ Suma y producto de términos iguales

2. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ Cuadrado de una suma

3. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ Cuadrado de una diferencia

4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ Cubo de una suma

5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$ Cubo de una diferencia

La idea clave de usar estas fórmulas (o cualquier otra fórmula en álgebra) es el **principio de la sustitución**: podríamos reemplazar cualquier expresión algebraica por cualquier letra en una fórmula. Por ejemplo, para determinar $(x^2 + y^3)^2$ aplicamos la fórmula 2 del producto, escribimos A en lugar de x^2 y B en lugar de y^3 para llegar a

$$(x^2 + y^3)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(y^3) + (y^3)^2$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Ejemplo 3 Aplicación de las fórmulas para productos especiales

Utilice las fórmulas para productos especiales para determinar cada uno de los productos.

a) $(3x + 5)^2$ b) $(x^2 - 2)^3$ c) $(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y})$

Solución

a) Al sustituir $A = 3x$ y $B = 5$ en la fórmula 2 de los productos, tenemos

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5) + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

b) Al sustituir $A = x^2$ y $B = 2$ en la fórmula 5 de los productos, tenemos

$$\begin{aligned}(x^2 - 2)^3 &= (x^2)^3 - 3(x^2)^2(2) + 3(x^2)(2)^2 - 2^3\\ &= x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8\end{aligned}$$

c) Al sustituir $A = 2x$ y $B = \sqrt{y}$ en la fórmula 1 de los productos, tenemos

$$\begin{aligned}(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y}) &= (2x)^2 - (\sqrt{y})^2\\ &= 4x^2 - y\end{aligned}$$

■

Factorización

Aplicamos la propiedad distributiva para expandir las expresiones algebraicas. Algunas veces necesitamos invertir este proceso usando otra vez la propiedad distributiva mediante la **factorización** de una expresión en productos de términos más simples. Por ejemplo, podemos escribir

FACTORIZACIÓN →

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

← EXPANSIÓN

Decimos que $x - 2$ y $x + 2$ son **factores** de $x^2 - 4$.

El tipo más sencillo de factorización se presenta cuando los términos tienen un factor común.

Ejemplo 4 Obtención de factores comunes

Factorice cada una de las expresiones.

a) $3x^2 - 6x$ b) $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$

c) $(2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3)$

Solución

a) El factor común máximo de los términos $3x^2$ y $-6x$ es $3x$, y entonces

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Verifique su respuesta

La multiplicación da

$$3x(x - 2) = 3x^2 - 6x \quad ✓$$

b) Observe que

8, 6 y −2 tienen a 2 como máximo factor común

x^4, x^3 y x tienen a x como máximo factor común

y^2, y^3 y y^4 tienen a y^2 como máximo factor común

De modo que el máximo factor común de los tres términos en el polinomio es $2xy^2$, por lo que

$$\begin{aligned}8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 &= (2xy^2)(4x^3) + (2xy^2)(3x^2y) + (2xy^2)(-y^2)\\ &= 2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2)\end{aligned}$$

Verifique su respuesta

La multiplicación da

$$2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2) = 8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 \quad ✓$$

c) Los dos términos tienen el factor común $x - 3$.

$$\begin{aligned}(2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3) &= [(2x + 4) - 5](x - 3) && \text{Propiedad distributiva}\\ &= (2x - 1)(x - 3) && \text{Simplificación}\end{aligned}$$

■

Para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, observamos que

$$(x + r)(x + s) = x^2 + (r + s)x + rs$$

de modo que es necesario escoger números r y s tal que $r + s = b$ y $rs = c$.

Ejemplo 5 Factorización de $x^2 + bx + c$ mediante ensayo y error

Factorice: $x^2 + 7x + 12$

Solución Necesitamos encontrar dos enteros cuyo producto sea 12 y cuya suma sea igual a 7. Mediante ensayo y error encontramos que los dos enteros son 3 y 4. Por lo tanto, la factorización es

$$x^2 + 7x + 12 = (x + \underbrace{3)(x + 4}_{\text{factores de 12}})$$

■

Verifique su respuesta

La multiplicación da

$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$ ✓

$$ax^2 + bx + c = (\overset{\text{factores de } a}{\overset{\downarrow}{p}}x + \underset{\text{factores de } c}{\underset{\uparrow}{r}})(\overset{\downarrow}{q}x + \underset{\uparrow}{s})$$

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$, buscamos factores de la forma $px + r$ y $qx + s$:

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s) = pqx^2 + (ps + qr)x + rs$$

Por lo tanto, tratamos de hallar números p, q, r, y s tal que $pq = a$, $rs = c$, $ps + qr = b$. Si todos estos números son enteros, entonces tendremos un número limitado de posibilidades para p, q, r y s.

Ejemplo 6 Factorización de $ax^2 + bx + c$ por ensayo y error

Factorice: $6x^2 + 7x - 5$

Solución Podemos factorizar 6 como $6 \cdot 1$ o bien $3 \cdot 2$, y -5 como $-25 \cdot 1$ o $5 \cdot (-1)$. Intentando estas posibilidades llegamos a la factorización

factores de 6

$$6x^2 + 7x - 5 = (\overset{\downarrow}{3}x + \underset{\uparrow}{5})(\overset{\downarrow}{2}x - \underset{\uparrow}{1})$$

factores de -5

■

Verifique su respuesta

La multiplicación da

$(3x + 5)(2x - 1) = 6x^2 + 7x - 5$ ✓

Ejemplo 7 Identificación de la forma de una expresión

Factorice cada una de las expresiones.

a) $x^2 - 2x - 3$ b) $(5a + 1)^2 - 2(5a + 1) - 3$

Solución

a) $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ Ensayo y error

b) Esta expresión es de la forma

$$\square^2 - 2\square - 3$$

donde ■ representa $5a + 1$. Ésta es la misma forma que la de la expresión en el inciso (a), de modo que se factoriza como $(\blacksquare - 3)(\blacksquare + 1)$.

$$\begin{aligned}(5a+1)^2 - 2(5a+1) - 3 &= [(5a+1) - 3][(5a+1) + 1]\\ &= (5a-2)(5a+2)\end{aligned}$$

■

Algunas expresiones algebraicas especiales se pueden factorizar usando las fórmulas siguientes. Las primeras tres son simplemente las fórmulas para productos especiales, pero escritas hacia atrás.

Fórmulas de factorización especial

Fórmula	Nombre
1. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	Diferencia de cuadrados
2. $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$	Cuadrado perfecto
3. $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$	Cuadrado perfecto
4. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$	Diferencia de cubos
5. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$	Suma de cubos

Ejemplo 8 Factorización de diferencias de cuadrados

Factorice cada polinomio.

a) $4x^2 - 25$ b) $(x + y)^2 - z^2$

Solución

a) Si usamos la fórmula de diferencia de cuadrados con $A = 2x$ y $B = 5$, tenemos

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$$

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

b) Aplicamos la fórmula de la diferencia de cuadrados con $A = x + y$ y $B = z$.

$$(x + y)^2 - z^2 = (x + y - z)(x + y + z)$$

■

Ejemplo 9 Factorización de diferencias y sumas de cubos

Factorice cada polinomio.

a) $27x^3 - 1$ b) $x^6 + 8$

Solución

a) Al aplicar la fórmula de diferencia de cubos con $A = 3x$ y $B = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}27x^3 - 1 = (3x)^3 - 1^3 &= (3x - 1)[(3x)^2 + (3x)(1) + 1^2]\\ &= (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)\end{aligned}$$

Matemáticas en el mundo moderno

Palabras, sonidos e imágenes que se cambian a números

Fotografías, sonidos y texto se transmiten en forma continua desde un lugar a otro por medio de Internet, máquinas para facsímiles o módem. ¿Cómo pueden ser transmitidas tales cosas por los cables del teléfono? La clave para hacerlo es transformarlas en números o bits (los dígitos 0 o 1). Es fácil ver cómo se cambia un texto a números. Por ejemplo, podríamos usar la correspondencia A = 0000001, B = 00000010, C = 0000011, D = 00000100, E = 0000101, y así sucesivamente. La palabra "BED" se convertiría en 000000100000001010000000100. Al leer los dígitos en grupos de ocho es posible traducir este núme-ro a la palabra "BED".

Cambiar el sonido a bits es más complicado. Una onda de sonido se puede graficar en un osciloscopio o una computadora. La gráfica se descompone matemáticamente en componentes más simples que corresponden a las frecuencias diferentes del sonido original. (Una rama de las matemáticas que se llama análisis de Fourier se usa aquí.) La intensidad de cada componente es un número y el sonido original se puede reconstruir a partir de estos números. Por ejemplo, la música se almacena en un disco compacto como una sucesión de bits; se podría ver como 1010100010100101001010101000001011110101000101011. . . . (¡Un segundo de música requiere 1.5 millones de bits!) El reproductor de discos compactos reconstruye la música a partir de los números en el disco.

Cambiar fotografías a números requiere expresar el color y la brillantez de cada punto, o pixel, en un número. Lo anterior se logra con mucha eficacia usando una rama de las matemáticas que se llama teoría ondulatoria. El FBI utiliza las ondas como una manera compacta de almacenar los millones de huellas digitales que necesitan.

b) Al aplicar la fórmula de la suma de cubos con $A = x^2$ y $B = 2$, tenemos

$$x^6 + 8 = (x^2)^3 + 2^3 = (x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 4) \qquad ■$$

Un trinomio es un cuadrado perfecto si es de la forma

$$A^2 + 2AB + B^2 \qquad \text{o bien,} \qquad A^2 - 2AB + B^2$$

Entonces, **reconocemos a un cuadrado perfecto** si el término medio ($2AB$ o bien, $-2AB$) es más o menos el doble del producto de la raíces cuadradas de los otros dos términos.

Ejemplo 10 Identificación de cuadrados perfectos

Factorice los trinomios.

a) $x^2 + 6x + 9$ b) $4x^2 - 4xy + y^2$

Solución

a) En este caso $A = x$ y $B = 3$, de modo que $2AB = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x$. Como el término medio es $6x$, el trinomio es un cuadrado perfecto. De acuerdo con la fórmula del cuadrado perfecto tenemos

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

b) Aquí, $A = 2x$ y $B = y$, de modo que $2AB = 2 \cdot 2x \cdot y = 4xy$. Puesto que el término medio es $-4xy$, el trinomio es un cuadrado perfecto. Mediante la fórmula del cuadrado perfecto tenemos

$$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2 \qquad ■$$

Cuando factorizamos una expresión, algunas veces el resultado se puede factorizar todavía más. En general, *primero buscamos los factores comunes*, luego inspeccionamos el resultado para ver si se puede factorizar por medio de otros métodos de esta sección. Repetimos el proceso hasta que hemos factorizado la expresión por completo.

Ejemplo 11 Factorización completa de una expresión

Factorice totalmente cada una de las expresiones.

a) $2x^4 - 8x^2$ b) $x^5y^2 - xy^6$

Solución

a) Primero factorizamos la potencia de x con el exponente más pequeño.

$$\begin{aligned} 2x^4 - 8x^2 &= 2x^2(x^2 - 4) && \text{El factor común es } 2x^2 \\ &= 2x^2(x - 2)(x + 2) && \text{Factorizamos } x^2 - 4 \text{ como una diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

b) Primero factorizamos las potencias de x y y con los exponentes más pequeños.

$$\begin{aligned} x^5y^2 - xy^6 &= xy^2(x^4 - y^4) && \text{El factor común es } xy^2 \\ &= xy^2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) && \text{Se factoriza } x^4 - y^4 \text{ como diferencias de cuadrados} \\ &= xy^2(x^2 + y^2)(x + y)(x - y) && \text{Se factoriza } x^2 - y^2 \text{ como diferencias de cuadrados} \qquad ■ \end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo se factorizan variables con exponentes fraccionarios. Este tipo de factorización se requiere en el cálculo.

Ejemplo 12 Factorización de expresiones con exponentes fraccionarios

Factorice las expresiones.

a) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ b) $(2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3}$

Solución

a) Factorice la potencia de x con el *exponente más pequeño*, es decir, $x^{-1/2}$.

$$\begin{aligned} 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2} &= 3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2) && \text{Se saca como factor } 3x^{-1/2} \\ &= 3x^{-1/2}(x - 1)(x - 2) && \text{Factorización de la expresión cuadrática } x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

b) Se toma como factor la potencia de $2 + x$ con el *exponente más pequeño*, es decir $(2 + x)^{-2/3}$.

$$\begin{aligned} (2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3} &= (2 + x)^{-2/3}[x + (2 + x)] && \text{El factor es } (2 + x)^{-2/3} \\ &= (2 + x)^{-2/3}(2 + 2x) && \text{Simplificación} \\ &= 2(2 + x)^{-2/3}(1 + x) && \text{Se saca como factor al 2} \end{aligned}$$

■

Para factorizar $x^{-1/2}$ a partir de $x^{3/2}$, *restamos* los exponentes:

$$\begin{aligned} x^{3/2} &= x^{-1/2}(x^{3/2-(-1/2)}) \\ &= x^{-1/2}(x^{3/2+1/2}) \\ &= x^{-1/2}(x^2) \end{aligned}$$

Compruebe su respuesta

Para ver si la factorización es correcta, multiplique usando las Leyes de los Exponentes.

(a) $3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2)$

$= 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ ✓

(b) $(2 + x)^{-2/3}[x + (2 + x)]$

$= (2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3}$ ✓

Los polinomios con al menos cuatro términos se pueden factorizar agrupando términos. El ejemplo siguiente ilustra la idea

Ejemplo 13 Factorización por agrupación

Factorice cada uno de los polinomios.

a) $x^3 + x^2 + 4x + 4$ b) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } x^3 + x^2 + 4x + 4 &= (x^3 + x^2) + (4x + 4) && \text{Términos agrupados} \\ &= x^2(x + 1) + 4(x + 1) && \text{Se toman factores comunes} \\ &= (x^2 + 4)(x + 1) && \text{Se saca como factor común } x + 1 \text{ de cada término} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^3 - 2x^2 - 3x + 6 &= (x^3 - 2x^2) - (3x - 6) && \text{Agrupación de términos} \\ &= x^2(x - 2) - 3(x - 2) && \text{Se sacan factores comunes} \\ &= (x^2 - 3)(x - 2) && \text{Se saca como factor común } x - 2 \text{ de cada término} \end{aligned}$$

■

1.3 Ejercicios

1–6 ■ Complete la tabla siguiente escribiendo si el polinomio es un monomio, binomio o trinomio. Luego liste los términos y establezca su grado.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
1. $x^2 - 3x + 7$			
2. $2x^5 + 4x^2$			
3. -8			
4. $\frac{1}{2}x^7$			
5. $x - x^2 + x^3 - x^4$			
6. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}$			

7–42 ■ Ejecute las operaciones que se piden y simplifique.

7. $(12x - 7) - (5x - 12)$

8. $(5 - 3x) + (2x - 8)$

9. $(3x^2 + x + 1) + (2x^2 - 3x - 5)$

10. $(3x^2 + x + 1) - (2x^2 - 3x - 5)$

11. $(x^3 + 6x^2 - 4x + 7) - (3x^2 + 2x - 4)$

12. $3(x - 1) + 4(x + 2)$

13. $8(2x + 5) - 7(x - 9)$

14. $4(x^2 - 3x + 5) - 3(x^2 - 2x + 1)$

15. $2(2 - 5t) + t^2(t - 1) - (t^4 - 1)$

16. $5(3t - 4) - (t^2 + 2) - 2t(t - 3)$